Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2011

Ana Catarina de Pinho Fernandes

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 11.º ANO

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2011

Ana Catarina de Pinho Fernandes

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 11.º ANO

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Homenagem Póstuma:

Ao meu querido avô…
Ensinaste-me que o amor é a melhor arma para vencer os desafios da vida…
É com esse sentimento que te dedico o meu trabalho.

A eterna saudade…

Aos meus pais, ao meu irmão e ao Hugo, pelo apoio incondicional…

o júri

presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
professora Auxiliar da Universidade de Abeiro

Prof. Doutora Maria Helena Silva Sousa Martinho
professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho

Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, pelas sugestões, críticas e instruções, pelo apoio incondicional e pela disponibilidade.

À Professora Isabel Órfão pelos seus ensinamentos.

Aos alunos da turma na qual realizei a Prática de Ensino Supervisionada. Sem o seu contributo, a realização deste trabalho não seria possível.

Aos meus pais e ao meu irmão que me apoiaram incondicionalmente, me confortaram e me ajudaram a ultrapassar todos os obstáculos.

Ao Hugo, sempre presente, que com um simples abraço me mostra que tudo na vida é possível.

Aos meus amigos pela compreensão e pelas palavras de apoio.

palavras-chave

Esquema de demonstração, métodos de demonstração, ensino secundário

resumo

O presente trabalho pretende analisar se os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam de forma adequada diferentes métodos de demonstração e identificar o tipo de justificações produzidas pelos alunos (recorrendo à taxonomia de Marrades e Gutiérrez) que servirão de base para identificar os esquemas de demonstração presentes nas repostas desses alunos.

Para este estudo ser possível, foram propostos aos alunos três problemas de demonstração envolvendo diferentes métodos de demonstração matemática. As respostas dos alunos aos problemas de demonstração propostos, serão analisadas, primeiramente, de forma global e, depois, será feita uma análise mais detalhada a quatro grupos com diferentes níveis de desempenhos. Esta última análise será completada, sempre que possível, com as notas de campo que foram recolhidas.

Este estudo tem, portanto, por base, uma metodologia de natureza qualitativa e descritiva, sendo enquadrado nas características de um trabalho de campo. Neste estudo, constatei, mediante as respostas dos alunos, que estes nem sempre recorrem a um único tipo de esquema de demonstração variando entre esquemas de natureza empírica e dedutiva, na resolução de um problema.

keywords

Proof scheme, methods of proof, secondary school

abstract

The aim of this work is to explore/analyse if the students from an 11.th grade class know how to use properly different methods of proof and to identify which kind of justifications they give (according to Marrades and Gutiérrez's taxonomy) which will help the identification of the proof schemes used on the students' answers.

To make this study possible three demonstration tasks with different and distinctive methods of proof were given to the students.

Students' answers will be analysed, firstly as a whole, and secondly, in much more detail four pairs of students, according to their level of performance. Whenever possible, this last analysis will be completed with the information/data gathered/collected on the field.

The methodology of this study is qualitative and descriptive and can be framed as a field work.

From all the answers of the students, I came to the conclusion that they not always resort to a single demonstration scheme, alternating between schemes of empirical and deductive nature, to solve the problem.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Símbolo	Nome
$\neg$	Negação lógica
$\wedge$	Disjunção lógica
$\vee$	Conjunção lógica
$\geq$	Desigualdade (maior ou igual)
$\leq$	Desigualdade (menor ou igual)
$=$	Igualdade
$\Rightarrow$	Implicação
$\Leftrightarrow$	Equivalência
$\in$	Pertença a um conjunto
$\forall$	Quantificação universal
$\exists$	Quantificação existencial
$\mathbb{N}$	Números naturais
$\vec{a}$	Vector a
$\lVert\ \rVert$	Norma
π	Pi
$\parallel$	Paralelo
$\perp$	Perpendicular

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

No presente capítulo apresento a motivação para a realização deste trabalho, bem como os objectivos e a organização do mesmo. Trata-se de um estudo das demonstrações produzidas pelos alunos de uma turma do 11º ano do ensino secundário, tendo por base as indicações metodológicas do Programa de Matemática do Ensino Secundário sobre o tema Demonstração.

1.1 Motivação para o Estudo

A motivação para este estudo surgiu, principalmente de dois factores. O primeiro relacionado com a importância que a demonstração tem na matemática, pois "Não existe matemática sem demonstração, com a qual, recorrendo a métodos e técnicas desenvolvidas ao longo de milénios, se fundamentam as respectivas conclusões." (Cardoso, Szymanski, & Rostami, 2009, p. 37). O outro factor está relacionado com o facto da demonstração matemática e respectivos métodos, deverem ser estudados ao nível do ensino básico e secundário, embora esta apareça como um tema transversal, sem existir um capítulo específico para ser leccionado e sem um tempo lectivo pré-determinado - "Referimo-nos aos temas transversais [...] que, sendo de difícil quantificação, não são por isso menos importantes que os temas antes referidos [Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço), Funções e Sucessões, Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística]" (ME-DES, 2001a, p.6).

Hoje em dia é geral a opinião de que a demonstração é um objectivo da educação matemática (Mariotti, 2006, p. 171) e, portanto, o desenvolvimento desta capacidade está inserida nos programas, embora de uma forma aberta, em que o professor tem a autonomia de escolher a altura adequada para proceder à educação dos seus alunos:

> O raciocínio e a demonstração não são actividades específicas reservadas para momentos especiais ou para tópicos do currículo especiais, mas antes deverão ser uma parte natural e integrante das discussões da sala de aula, seja qual for o tema em estudo. Em ambientes produtivos de sala de aula de matemática, os alunos

> deverão esperar ter que explicar e justificar as suas conclusões. (NCTM, 2007, p. 404)

Os Programas de Matemática do Ensino Básico, de 1991, faziam referências a demonstração mas de forma implícita. Contudo, com a necessidade de mudar este e outros aspectos, elaborou-se o Currículo Nacional do Ensino Básico que referencia a demonstração, de forma explícita "Esta competência matemática que todos devem desenvolver, no seu percurso ao longo da educação básica inclui: […] a compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração […]" (2001, p. 57).

O Programa de Matemática do Ensino Básico refere que existem três competências essenciais e serem desenvolvidas nos alunos: a comunicação matemática, a resolução de problemas e o raciocínio matemático. Esta última capacidade envolve

> […] a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, […] no fim do terceiro ciclo os alunos devem ser capazes de distinguir raciocínio indutivo, dedutivo, abdutivo e intuição; devem reconhecer os diferentes métodos de demonstração (ME-DEB, 2007, p.8)

Desta forma, um aluno que passe para o ensino secundário, já deve estar familiarizado com a demonstração matemática, conhecendo métodos de demonstração.

No ensino secundário, como já referi anteriormente, não existe um capítulo específico para a demonstração matemática, contudo,

> No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem usado já os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). […] A indução matemática deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias […]). A abordagem de algumas demonstrações directas e indirectas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) é inevitável. Assumem também uma

> grande importância demonstração utilizando contra-exemplos. (ME-DES, 2001a, p.21).

Enquanto aluna, não estudei segundo o programa de ensino básico de 2007, mas estudei de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Secundário de 2001. No entanto, apenas reconhecia a demonstração como uma combinação de propriedades que já conhecíamos para mostrar algo novo e sabia que podíamos usar contra-exemplos para mostrar que uma proposição era falsa. Contudo, não conhecia os diferentes métodos de demonstração evidenciados no programa, sendo a adaptação ao ensino superior bastante difícil. No futuro, como professora, pretendo que alunos compreendam a importância da demonstração e reconheçam que, perante uma determinada situação, existe uma técnica que facilita a demonstração da mesma.

Há necessidade de desenvolver nos alunos os raciocínios envolvidos na demonstração, bem como a sua capacidade de argumentação, pois "No final do ensino secundário, os alunos deverão ser capazes de compreender e produzir demonstração matemática" (NCTM, 2001, p.61) e, como mostram estudos de Harel e Sower (2007, p.806) geralmente os estudantes do ensino secundário têm uma fraca *performance* relativamente à demonstração matemática.

Os alunos, no fim do 12º ano de escolaridade devem "reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticos; seleccionar e usar tipos de raciocínio e métodos de demonstração" (NCTM, 2001, p.61).

No entanto, deve-se ter em conta que diferentes pessoas podem demonstrar de diferentes formas, pois a interacção social constitui um factor fundamental que afecta, motiva e alimenta uma dialéctica de validação (Mariotti, 2006, p. 188).

1.2 Objectivo do Estudo e Questões de Investigação

Desta forma, o trabalho que pretendo desenvolver tem como objectivo compreender a forma como alunos de uma turma de 11º ano do ensino secundário respondem a problemas de demonstração propostos. Analisando os tipos de justificações produzidas e os processos utilizados nas suas respostas, tentarei compreender qual (ou quais) o(s) esquema(s) de demonstração que estão envolvido(s). Desta forma, resultam as seguintes questões de investigação:

i) Os alunos conseguem utilizar adequadamente diferentes métodos de demonstração?

ii) Qual (ou quais) as justificações e o(s) esquema(s) de demonstração dos alunos?

1.3 Organização do Estudo

No capítulo seguinte são apresentadas algumas definições para demonstração matemática e é explicada a perspectiva de Harel e Sowder (2007), sobre o ensino e a aprendizagem de demonstração, que tem como elemento unificador e organizador a construção do esquema de demonstração. No terceiro capítulo elenco e explico diferentes métodos de demonstração mostrando, sempre que se aplique, as tautologias que estão na base dos mesmos. Desta forma, apresento também as tabelas de verdade necessárias para se chegarem a essas tautologias, indo procurar também os conceitos de Lógica Matemática que foram adquiridos pelos alunos nas aulas de Filosofia. No capítulo 4 além dos problemas de demonstração propostos aos alunos para a recolha de dados e de uma possível resolução, apresento as razões que me levaram a escolher tais problemas. O capítulo 5, referente à metodologia usada no trabalho, contém as opções metodológicas bem como a descrição dos participantes, da escola, dos instrumentos de recolha de dados e da análise dos dados. No capítulo 6, faço a análise dos dados: primeiramente uma análise global e, depois, uma análise detalhada a quatro grupos de alunos. O capítulo 7 é usado para descrever as conclusões e reflexões sobre o trabalho.

CAPÍTULO 2 – DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA E O ESQUEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Neste capítulo apresento os estudos de vários autores sobre o objecto de estudo deste trabalho: a demonstração matemática e o esquema de demonstração.

2.1 Demonstração Matemática

A demonstração pode ser vista, de uma forma muito simplificada, como uma sucessão finita de argumentos lógicos que mostram que uma conjectura é verdadeira. Segundo Harel e Sowder (2007, p. 808), "Proving is the process employed by an individual (or a community) to remove doubts about the truth of an assertion".

Os estudos realizados por Hanna e Bardieu (2008) referem a importância da demonstração para além do estabelecimento da verdade matemática, ou seja, "[…] a demonstração de um teorema envolve estratégias, métodos, heurísticas e conceitos que se podem transpor para outras situações" (Neto, 2010, p. 93).

Para Duval e Egret (1989, p. 29), do ponto de vista cognitivo, demonstrar consiste em transformar um ou mais enunciados dados inicialmente, num outro enunciado, recorrendo a várias substituições.

Contudo, num trabalho datado de 1982, Balacheff (p.273) alerta para a diferença que há entre prova e demonstração. Desta forma, provas são explicações aceites por uma comunidade num dado momento. A decisão de aceitar a explicação como prova, tem por base um sistema de validação comum aos elementos da comunidade. Demonstrações são as provas aceites pelos matemáticos e, portanto, respeitam rigorosamente determinadas regras – existem enunciados que são considerados verdadeiros (os axiomas), os outros são deduzidos a partir destes ou de outros previamente demonstrados, recorrendo-se a regras de dedução de entre um conjunto de regras lógicas. O mesmo investigador faz uma discussão entre várias perspectivas da demonstração matemática no processo de ensino e de aprendizagem, destacando a existência de aspectos comuns nas epistemologias da demonstração matemática: (i) o reconhecimento de que a origem da racionalidade matemática é construída sobre e contra a racionalidade baseada no senso comum, apoiada em aspectos culturais históricos, sociais, morais, religiosos e profissionais; (ii) a relação entre argumentação e demonstração; (iii) a demonstração deve ser considerada à luz da teoria e da prática; (iv) o reconhecimento de que conteúdos matemáticos geram dificuldades que devem ser superadas através da demonstração, ou mesmo, esses conteúdos devem surgir através da demonstração matemática; (v) o professor tem um papel chave para estimular e facilitar o processo de ensino e aprendizagem da demonstração matemática. (Balacheff, 2004, pp. 12-13)

De Villiers (2002, s.p.) refere que "[…] proof has many other important functions with mathematics, which in some situation are of far a greater importance to mathematics than of mere verification." Essas funções são, por exemplo, a de explicação (revelação de informações dobre veracidade de uma determinada afirmação); a de descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados); a de comunicação (negociação de um resultado); a de desafio intelectual (satisfação pessoal pelo êxito na construção de uma demonstração); e a de sistematização (organização de vários resultados num sistema dedutivo de conceitos, axiomas e teoremas).

A demonstração promove "[…] o hábito de argumentar oralmente ou por escrito […]", desenvolvendo "O hábito de pensar correctamente[…]" (ME-DES, 2001a, p.21) contribuindo para a construção de conhecimentos matemáticos.

> Proof clearly has de purpose of validation - confirming the truth of an assertion by checking the logical correctness of mathematical arguments - however, at the same time, proof has the contribute more widely to knowledge construction. If this is not the case, proof is likely to remain meaningless and purposeless in the eyes of students. (Mariotti, 2006, p. 195),

Estando presente a importância do ensino da demonstração matemática, a questão que se levanta é a de como a ensinar na sala de aula, como é feita e aceite pelos alunos. Neste estudo terei como base o conceito de *esquema de demonstração* estudado por Harel e Sowder (2007) num trabalho denominado por *Toward Comprehensive Perspectives on the*

Learning and Teaching of Proof apresentado na publicação Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 805-842). Para classificar as respostas dos alunos, considerarei a taxonomia usada pelos autores neste estudo. Contudo, recorrerei também à taxonomia apresentada por Marrades e Gutiérres (2000), para classificar o tipo de justificações produzidas pelos alunos. Esta segunda taxonomia tem por base estudos feitos anteriormente por Harel e Sowder, em 1998, considerando que o tipo de justificações produzidas pelos alunos passa entre métodos empíricos e dedutivos. Assim, a classificação do tipo de justificações pode ajudar a compreender o tipo de esquema de demonstração presente na resposta dos alunos, uma vez que ambas as taxonomias estão relacionadas.

2.2 O CONCEITO DE "ESQUEMA DE DEMONSTRAÇÃO"

Num trabalho de dez anos, Harel e Sowder (2007), investigaram sobre o ensino e a aprendizagem da demonstração.

Uma importante característica deste estudo é o aspecto subjectivo da demonstração e, desta forma, para os autores, a demonstração é vista como algo que estabelece uma verdade matemática para um indivíduo ou para uma comunidade. Contudo, o seu significado e o seu papel, a forma como é feita, verificada e aceite pode variar de pessoa para pessoa e de comunidade para comunidade - "The meaning of proof, its role, and the way it is created, verified, and accepted may vary from person to person and from community to community." (Harel e Sowder, 2007, p. 807).

A construção do conhecimento não ocorre no vazio, isto é, o que um aluno sabe hoje servirá de base para o que vai aprender no futuro, para os autores, isto tem implicações ao nível pedagógico. Então no que diz respeito à demonstração, deve-se ter em conta três factores: o aluno deve ser visto como um aprendente, deve-se ter em conta a manutenção da integridade do conceito de demonstração como foi compreendida e praticada ao longo da história da matemática e, em terceiro lugar, deve-se ter em consideração que o conceito de demonstração tem uma natureza social (isto é, o que é dado como argumento convincente por uma pessoa deve ser entendido pelas outras). (*Ibid*, p. 808).

É de especial interesse compreender ainda em que medida os factores histórico-epistemológicos são importantes para o conceito de esquema de demonstração. Os autores referem que, há mais de 20 séculos, os gregos conceberam o pensamento de que o raciocínio dedutivo caracteriza-se como uma sequência de proposições que são aceites como verdadeiras se as proposições antecedentes a estas também são verdadeiras. (*Ibid*, p.811)

A contribuição dos gregos é tão notável que, segundo os autores, se tornou referência histórica e então, analisam a construção do esquema de demonstração em três períodos: matemática grega, matemática pós-grega (aproximadamente a partir do séc. XVI ao séc. XIX) e matemática moderna (a partir dos finais do séc. XIX). (*Ibid.,* p.811)

Os matemáticos pré-gregos estavam preocupados com uma matemática de entidades físicas, sendo as demonstrações produzidas num regime de demonstração empírico, enquanto a matemática grega, tratando de realidades espaciais e quantitativas, procurava demonstrar através de esquemas dedutivos. Contudo, é provável que a matemática dedutiva dos gregos tenha tido por base a matemática dos seus antecessores. Este facto levanta a questão pedagógica de qual o papel dos esquemas de demonstração empírico no desenvolvimento de esquemas de demonstração dedutivo. Os autores referem então que, os esquemas de demonstração empíricos são inevitáveis, pois é comum usarem-se exemplos e, além disso, os exemplos podem ajudar a criar ideias. O problema reside na questão de como ajudar os alunos a utilizarem os esquemas empíricos e de convicção externa para desenvolverem esquemas de demonstração dedutivos. (*Ibid.*, pp.816-817)

Enquanto as realidades espaciais e quantitativas determinavam os axiomas e postulados da matemática grega, as entidades da matemática moderna podem ser bastante arbitrárias e regidas por um conjunto de axiomas. Além disso, na matemática grega a demonstração pode não separar completamente a forma do conteúdo, enquanto na matemática moderna, a demonstração é válida em virtude apenas da sua forma. (*Ibid.,* p.817)

Com um trabalho iniciado por Vieta, a álgebra simbólica teve um papel fundamental na passagem da matemática grega para a matemática moderna, especificamente ao reconceituar a demonstração como uma sequência de argumentos válidos em virtude da sua forma e não de conteúdo. Então, para demonstrar um teorema, pode-se começar com identidades e, através de substituições simbólicas, realizar um número finito de etapas até que o teorema esteja provado. Com a álgebra simbólica, a atenção da matemática passou de uma atenção dos resultados de operações, para as próprias operações. (*Ibid.*)

O papel da álgebra simbólica na reconceituação da demonstração matemática levanta as questões de se é possível que os alunos desenvolvam a concepção de demonstração sem fluência computacional e se os recursos electrónicos fornecem aos alunos a possibilidade de desenvolverem habilidades de manipulação algébrica para este novo conceito de demonstração. Então, os autores defendem a necessidade de se distinguirem dois tipos de esquema de demonstração: o simbólico não referencial e o simbólico referencial. No primeiro, nem os símbolos nem as operações representam, para os alunos, uma realidade qualitativa e, pelo contrário, no esquema de demonstração simbólico referencial, os alunos aprendem a representar algebricamente e a manipular símbolos nas expressões, chegando através destas representações, à demonstração ou a refutação de determinada asserção. (*Ibid.,* pp.817-818)

Simultaneamente ao aparecimento da álgebra simbólica surgiu também uma nova concepção de número, pois enquanto os gregos seleccionavam criteriosamente os números rejeitando, por exemplo, os números irracionais, os matemáticos pós-gregos, começaram a aceitá-los. (*Ibid*, p. 818)

Para os autores, a definição de esquema de demonstração é centrada nos alunos e tem por base outras três definições: a de Conjectura *versus* Facto, a de Demonstrar e a de Convencer *versus* Persuadir. A primeira, Conjectura *versus* Facto, está relacionada com o facto de uma afirmação ser concebida por um indivíduo como uma conjectura ou como um facto; é uma conjectura quando a veracidade dessa afirmação é desconhecida para o indivíduo e é um facto quando essa afirmação se torna verdade para o indivíduo. A definição de demonstração, já referenciada no subcapítulo anterior, é o processo que um indivíduo ou uma comunidade utiliza para remover as dúvidas sobre uma determinada afirmação. Por fim, a definição de Convencer *versus* Persuadir está relacionada com o facto de convencer ser o processo utilizado por um indivíduo ou por uma comunidade para remover as suas dúvidas sobre a verdade de uma determinada afirmação, enquanto que persuadir consiste em encontrar um processo que permita remover as dúvidas de outro indivíduo ou de outra comunidade sobre a verdade dessa afirmação. (*Ibid*, 2007, p.808)

Das três definições anteriores resulta a definição de esquema de demonstração. O esquema de demonstração de uma pessoa (ou comunidade) consiste no que é verificar e persuadir para a pessoa (ou comunidade) - "A person's (or a community's) proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person (or community)" (*Ibid*, p. 809).

A taxonomia do esquema de demonstração resume-se em três classes: *esquemas de demonstração de convicção externa*, *esquema de demonstração empírico* e *esquema de demonstração dedutivo*. Os esquemas de demonstração por convicção externa, dividem-se em três subclasses: *esquemas de demonstração autoritário* (quando dependem de uma autoridade como um professor ou um livro), *esquema de demonstração ritual* (estritamente sobre a aparência do argumento – por exemplo, o formato) e, *esquema de demonstração simbólico não-referencial* (depende da coerência na manipulação dos símbolos). Os esquemas de demonstração empíricos, são marcados pela dependência de exemplos (*esquemas de demonstração indutivos*) ou percepções (*esquema de demonstração perceptual*). Os esquemas de demonstração dedutivos dividem-se em duas subclasses: *esquemas de demonstração transformacionais* e *esquemas de demonstração axiomáticos*, que dependem de três características – generalidade, pensamento operacional e inferência lógica. A *generalidade* está relacionada com o facto de um indivíduo justificar objectivamente os seus argumentos, sem casos isolados nem excepções; o *pensamento operacional* ocorre quando são evidenciadas tentativas de antecipar os seus resultados durante o processo de demonstração; *inferência lógica* está presente quando o indivíduo usa justificações baseadas em regras de inferência lógica. Os esquemas de demonstração axiomáticos têm por base estas mesmas três características tendo o processo de demonstração iniciado com axiomas. (*Ibid*, pp. 809-810)

A taxonomia desenvolvida por estes autores, tem relações com outras, como as desenvolvidas por Bell em 1976 ou por Balacheff em 1988. Em termos gerais, os esquemas de demonstração empírica e os esquemas de demonstração dedutiva correspondem, respectivamente, a *justificações empíricas* e *justificações dedutivas* – nos estudos de Bell – e a *justificações pragmáticas* e *justificações conceptuais* – nos estudos de Balacheff. Este último autor divide ainda as justificações pragmáticas em *empirismo ingénuo* (as justificações são feitas recorrendo a alguns exemplos aleatórios), *experimentação crucial* (as justificações são baseadas numa selecção cuidada de exemplos) e *exemplo genérico* (as justificações são baseadas em exemplos representativos de uma classe). Bell deu, portanto importância ao facto dos alunos recorrerem a exemplos nas suas justificações. (*Ibid*, pp.810-811)

Outra taxonomia para as justificações produzidas pelos alunos, também relacionada com a taxonomia de esquema de demonstração, é a de Marrades e Gutiérrez (2000). Estes autores, baseados em estudos feitos por Harel e Sowder em 1998 (e por isso também centrado na natureza das respostas dos alunos), apresentaram uma taxonomia tendo por base o tipo de justificações produzidas pelos alunos e a passagem entre métodos de dedução empírica e dedutiva. Desta forma, foram diferenciadas duas categorias principais: as *justificações empíricas* e as *justificações dedutivas*. As *justificações empíricas* são diferenciadas, por sua vez, em três tipos - *empirismo simples*, *experimentação crucial* e *exemplo genérico* - nas *justificações dedutivas* distinguem-se duas categorias - *experimentação pensada* e *dedução formal*. (Neto, 2010, pp. 91-92)

As justificações são consideradas *empíricas* quando o aluno usa o exemplo como elemento de convicção. A elaboração de conjecturas parte da observação de exemplos e esses exemplos ou as relações entre eles são a base para justificar a conjectura. (*Ibid*)

Quando o aluno mostra que a conjectura é verdadeira usando um ou mais exemplos, normalmente seleccionados sem um critério específico, trata-se de um *empirismo simples*. Esta categoria pode ser de dois tipos: *perceptual* (se a percepção é somente visual ou táctil) e *indutivo* (quando envolve o uso de exemplos matemáticos ou relações encontradas nos exemplos). (*Ibid*)

Trata-se de uma *experimentação crucial* quando o aluno mostra que a conjectura é verdadeira com um exemplo específico seleccionado de forma cuidadosa. Estando consciente da necessidade de generalização, o aluno escolhe um exemplo não particular mas possível, partindo do princípio que se no exemplo a conjectura é verdadeira, então será sempre verdadeira. Dependendo da forma como o exemplo crucial é usado, distinguem-se quatro tipos de justificação por experimentação crucial: *baseada em exemplos* (quando a justificação só envolve um exemplo ou a falta de contra-exemplos), *construtiva* (quando as justificações de focam na forma de obter o exemplo), *analítica* (quando as justificações são baseadas em propriedades observadas, de forma empírica, no exemplo ou em elementos auxiliares) e *intelectual* (quando a justificação é baseada na observação empírica do exemplo, mas usa, principalmente, propriedades aceites ou relações entre elementos do exemplo). (*Ibid*)

Quando o aluno faz uma justificação recorrendo a propriedades abstractas e a elementos de uma família, mas claramente baseada num exemplo específico, representativo da sua classe trata-se de uma justificação empírica por *exemplo genérico*. Na descrição da forma como o exemplo específico é usado estão presentes os tipos de justificação da experimentação crucial, definidos anteriormente. (*Ibid*)

Nas justificações empíricas, quando o aluno não é capaz de elaborar uma conjectura verdadeira, ou quando embora elabore uma conjectura verdadeira, não é capaz de produzir uma justificação, considera-se a categoria *Resposta Errada*. (*Ibid*)

Ao contrário das justificações empíricas, nas *justificações dedutivas*, se forem usados exemplos é apenas como ajuda para a organização dos argumentos e, como tal, as características particulares do exemplo não são consideradas na justificação. Desta forma, não há a contextualização dos argumentos usados na justificação e esta é baseada em aspectos genéricos do problema, em operações mentais e em deduções lógicas. (*Ibid*)

Quando o aluno usa um exemplo específico para organizar a sua justificação, trata-se de uma *experimentação pensada*. Existem dois tipos de experimentação pensada: as *justificações transformativas* (quando o aluno faz operações mentais que permitem uma transformação do problema inicial num problema equivalente, sendo a função do exemplo ajudar a prever que transformações são convenientes); e as *justificações estruturais* (elaboram sequências de deduções lógicas que derivam do conjunto de dados do problema, de axiomas, de definições ou de teoremas já demonstrados. Os exemplos, neste caso, ajudam a organizar os passos da dedução). (*Ibid*)

Quando o aluno, sem a ajuda de exemplos, constrói uma justificação baseada em operações mentais, mencionando apenas os aspectos genéricos do problema, estamos perante uma *dedução formal* (tipo de demonstração matemática encontrada no mundo da investigação). Nesta classe também encontramos as *justificações transformativas* e as *justificações estruturais*, já definidas na experimentação pensada. (*Ibid*)

À semelhança do que acontece com as justificações empíricas, nas justificações dedutivas também há a hipótese de *Resposta Errada*. Esta ocorre quando os alunos elaboram uma conjectura correcta mas falham na elaboração de uma justificação ou quando, embora usem estratégias dedutivas para a demonstração, não elaboram uma conjectura verdadeira. (*Ibid*)

Os estudos realizados por estes dois autores mostram que, muitas vezes, os alunos recorrem primeiramente a estratégias de verificação empírica, passando para uma justificação dedutiva depois de compreender o problema e a forma como podem justificar a hipótese. É comum também os alunos variarem, ao longo de um problema, entre justificações empíricas e dedutivas. (*Ibid*)

Neste trabalho, para analisar as respostas dos alunos, recorrerei a duas taxonomias: uma desenvolvida por Marrades e Gutiérrez, que tipifica as justificações produzidas pelos alunos, a outra, desenvolvida por Harel e Sowder, que caracteriza os esquemas de demonstração que os alunos usam. Como já referi anteriormente, estas duas taxonomias estão relacionadas, pois as justificações empíricas e dedutivas correspondem, em termos gerais, aos esquemas de demonstração empíricos e dedutivos. A taxonomia das justificações tem mais categorias que a de esquemas de demonstração, pois por exemplo, quando a conjectura ou a justificação de um aluno está errado, a justificação é do tipo *resposta errada* e, Harel e Sowder não tipificam esta possibilidade. Por outro lado, esta última taxonomia, envolve conceitos mais amplos que a anterior, já que o esquema de demonstração está relacionado com a forma como os alunos verificam e persuadem. Talvez a taxonomia desenvolvida por Harel e Sowder fosse suficiente, se tivesse presente os diálogos dos alunos enquanto respondiam aos problemas de demonstração, pois assim poderia compreender a forma como se persuadem de uma determinada proposição. Como a análise das respostas dos alunos só será feita tendo em conta as suas produções escritas e algumas notas que consegui tirar, penso ser proveitoso ter por base os tipos de justificações para tentar caracterizar o tipo de esquemas de demonstração usados pelos alunos.

CAPÍTULO 3 – MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Este capítulo tem como principal objectivo o de elencar e explicar os diferentes métodos de demonstração que podem ser estudadas no ensino secundário: por contraposição, por redução ao absurdo, por Indução Matemática e, por fim, a demonstração por contra-exemplos.

Para se conseguir compreender alguns destes métodos, é necessário ter presente algumas noções de Lógica Matemática. À semelhança do que acontece com a demonstração, nos programas de Matemática não existe um capítulo de Lógica, subentendendo-se que esta, deve ser leccionada pelo professor, à medida que é necessária

> As questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. (ME, 2001a, p.2).

Assim, antes de descrever cada uma das estratégias de demonstração, farei uma pequena análise aos conteúdos de lógica que os alunos estudam na disciplina de Filosofia, bem como uma breve análise das tabelas de verdade mais simples, para chegar, *à posteriori*, à lei da contraposição e à tautologia que está na base da demonstração por redução ao absurdo.

3.1 Lógica Matemática

3.1.1 Lógica na Filosofia

Os alunos do ensino secundário, no 11º ano, têm contacto directo com Lógica na disciplina de Filosofia. Nesta disciplina, no capítulo *Racionalidade argumentativa e Filosofia*, estudam dois temas de especial importância para a disciplina de Matemática: i) Argumentação e lógica formal e, ii) Argumentação e retórica. No primeiro tema os alunos têm como metas de aprendizagem a "clarificação das noções de lógica, proposição/juízo e raciocínio, a partir da distinção validade/verdade - forma/conteúdo", "[…]regras do silogismo ou, em alternativa, conectivas proposicionais e tabelas de verdade", "principais falácias formais[…]" e "indução e dedução". No segundo tema, os alunos deverão estudar a "racionalidade argumentativa: distinção entre demonstração […] e argumentação […]" e a "[…] identificação de alguns tipos de argumentos e de algumas falácias informais.". (ME, 2001b, p. 32)

Assumindo que os alunos têm as noções de Lógica exigidas no programa de Filosofia, é facultado o trabalho do professor de Matemática, podendo recorrer à primeira disciplina para explicar algumas das estratégias de demonstração referidas a seguir. Desta forma estabelece-se ainda uma conexão entre a Matemática e outras disciplinas (neste caso com a Filosofia) - uma sugestão metodológica recomendada no Programa de Matemática do Ensino Secundário (p.10).

3.1.2 Tabelas de Verdade

Considerando-se as proposições p e q, $\neg\, p$ representa a negação de p. Então:

Tabela 3.1 - Tabela de verdade para a negação da proposição p

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\neg p}$
V	F
F	V

Relativamente à conjunção, $\wedge$, de duas proposições, sabe-se que uma conjunção é verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras

Tabela 3.2 - Tabela de verdade para a conjunção de duas proposições

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A disjunção é verdadeira se, pelo menos uma das proposições é verdadeira:

Tabela 3.3 - Tabela de verdade para a disjunção de duas proposições

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De acordo com as tabelas apresentadas anteriormente, podemos deduzir a tabela de verdade para a implicação de duas proposições. Considerando as proposições p e q, a implicação $p \Rightarrow q$ significa que se a proposição p é verdadeira, então a proposição q também é verdadeira. De notar que a implicação é falsa se e só se p é verdadeiro e q é falsa. (Cardoso, Szimansky, & Rostami, 2009, p.37). Então temos a seguinte tabela:

Tabela 3.4 - Tabela de verdade para a implicação de duas proposições

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Considerando o operador "⇔", temos uma correspondência biunívoca, que pode ser transformada na conjunção de duas unívocas. Então, ter $p \Leftrightarrow q$ é o mesmo que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Assim, de acordo com as tabelas de verdade anteriores temos que:

Tabela 3.5 - Tabela de verdade para a equivalência de duas proposições

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Se os alunos compreenderem as 5 tabelas de verdade anteriores, eles conseguem construir todas as tabelas de verdade que lhes possam pedir, com os mesmos operadores, para diferentes valores lógicos das proposições e mesmo usando mais proposições.

Desta forma, os alunos poderão mostrar a lei de contraposição que é a base da demonstração por contraposição, isto é, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

3.2 Métodos de demonstração

Perante uma situação de demonstração há que pensar sobre a melhor forma de o fazer. Desta forma há que desenvolver estratégias e, escolher um método que seja adequado para a demonstração dessa situação. Existem diferentes métodos de demonstração - abaixo estão explicados aqueles que devem ser estudados pelos alunos do ensino secundário.

Demonstração por contraposição

Muitas vezes os teoremas se escrevem a partir de implicações $p \Rightarrow q$ e, então, é usual dizer que p é a hipótese e q a tese. Este método de demonstração baseia-se na lei da contraposição, isto é, em mostrar que $\neg q \Rightarrow \neg p$ uma vez que é semelhante a provar que $p \Rightarrow q$, pois esta lei é uma tautologia (Cardoso, Szymansky, & Rostami, 2009, p.39). Vejamos:

Tabela 3.6 - Tabela de Verdade para a lei de contraposição

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{p}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Desta forma, neste método de demonstração, admite-se como hipótese $\neg q$ concluindo-se que p também é falso, mostrando-se, desta forma que $p \Rightarrow q$.

DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO AO ABSURDO

Admitindo a implicação anterior, $p \Rightarrow q$, onde p é a hipótese e q a tese, na demonstração por redução ao absurdo considera-se que a tese é falsa. Seguidamente, através de raciocínios lógicos chega-se a uma contradição com a hipótese (que é absurdo). Desta forma pode-se concluir que a tese é verdadeira uma vez que o absurdo resulta de supor que a tese é falsa.

Este método, tem como base a tautologia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ que, a partir das Leis de Morgan se obtém a tautologia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$, como se pode ver na tabela seguinte:

Tabela 3.7 - Tabela de verdade para a tautologia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \wedge \neg q}$	$\boldsymbol{\neg(p \wedge \neg q)}$	$\boldsymbol{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)}$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Uma demonstração baseada no Princípio de Indução Matemática é chamada a Demonstração por Indução. Este método de demonstração é válido para provar proposições que envolvam números naturais. Assim sendo, considere-se para $n \in \mathbb{N}$ a proposição $P(n)$. Para mostrar que esta proposição é verdadeira para todo $n \geq n_0$, basta mostrar que.

i) A proposição $P(n_0)$ é verdadeira;

Este primeiro passo é, por vezes, chamado de *caso base* (Velleman, 1998, p. 245).

ii) Para cada $k \geq n_0, k \in \mathbb{N}$, a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ também é verdadeira, isto é, a proposição $P(k+1)$ é verdadeira se $P(k)$ é verdadeira (Cardoso, Szymansky, & Rostami, 2009, p.42).

De acordo com os mesmos autores (p.41-42), este método decorre da regra de inferência $[P(n_0) \wedge \forall_{n \geq n_0} (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall_{n \geq n_0} P(n)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $\forall_{n \geq n_0} \left(P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)$.

Este segundo passo é, normalmente chamado por, *passo de indução* (Velleman, 1998, p. 245).

(iii) *Conclusão:* Concluir através da hereditariedade, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

CAPÍTULO 4 – PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO PROPOSTOS

Neste capítulo faço uma descrição da forma como foram planificados e implementados os problemas de demonstração propostos aos alunos. Apresento as entidades primárias envolvidas nos problemas – de acordo com uma perspectiva ontosemiótica – e uma possível demonstração para cada um dos problemas.

4.1 PLANIFICAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO

"A gestão curricular realizada pelo professor implica a (re)construção do currículo, tendo em conta os seus alunos e as suas condições de trabalho" (Ponte, 2005, p.1). Como já referi, os programas de Matemática quer do ensino básico como do ensino secundário, vêem a demonstração como tema transversal ao programa e, desta forma, está ao critério do professor a escolha dos temas adequados para serem desenvolvidas as aprendizagens relacionadas com a demonstração.

Os alunos que resolveram os problemas de demonstração, já conheciam diferentes métodos de demonstração dos anos de escolaridade anterior, sendo a demonstração por Indução Matemática, o único método de demonstração que lhes era novo.

Assim sendo, comecei por escolher dois problemas de demonstração onde se poderiam usar diferentes métodos, sendo o primeiro orientado para uma demonstração por redução ao absurdo e o segundo para o método de Indução Matemática. Como este último método se tratava de uma novidade para os alunos, foi dado aos mesmos, juntamente com os problemas de demonstração, a explicação do método por escrito e uma aplicação prática, propondo aos estudantes que por si mesmos, explorassem e tentassem compreender esta nova forma de demonstração (ver Anexo I).

Depois de recolhidas as respostas dos alunos, numa aula seguinte, a professora da turma, aproveitando o capítulo das Sucessões, retomou o método de demonstração por Indução Matemática e, *à posteriori*, num momento de avaliação (ver Anexo II – Parte 3), os alunos tiverem de demonstrar uma outro problema recorrendo ao mesmo método. Este problema também foi recolhido como dado a analisar, com o intuito de interpretar se os alunos conseguiram um melhor resultado após uma aprendizagem mais detalhada.

Os três problemas de demonstração foram, portanto, implementados em sala de aula.

O primeiro problema, apelativo ao uso do método de demonstração por redução ao absurdo, envolve conceitos adquiridos pelos alunos no 10º ano do ensino secundário e revistas no 11º ano, no capítulo de Geometria, em ambos os casos: posições relativas entre rectas, entre planos e entre rectas e planos. Além disso, achei de grande interesse uma demonstração neste tema uma vez que estes alunos têm no seu plano curricular Geometria Descritiva e, ao longo das aulas que presenciei, pareceu-me que, grande parte destes alunos, gostavam deste tema. Assim, considerei pertinente recorrer à Geometria, para ver se os alunos conseguiam justificar os seus conhecimentos e as decisões tomadas ao nível da demonstração.

O segundo problema de demonstração, teve o propósito do uso do método de Indução Matemática. Escolhi uma demonstração relacionada com trigonometria, uma vez que também é um tema estudado no 11º ano de escolaridade. Além dos conhecimentos adquiridos sobre o co-seno, os alunos precisavam também de ter presentes a propriedade inerente à multiplicação de potências com a mesma base.

Após esta primeira fase de recolha de dados, os alunos começaram a estudar as Sucessões e então, neste capítulo, foi revisto o método de demonstração por Indução Matemática – a professora explicou o método, para aqueles que eventualmente não o tivessem compreendido e utilizou-o em demonstrações pedidas neste capítulo. Num momento de avaliação foi dada uma secessão definida por recorrência e o seu termo geral e foi, então, pedido aos alunos que demonstrassem que a igualdade dada é, de facto, o termo geral da sucessão dos números triangulares.

De notar que todos os problemas de demonstração propostos aos alunos, incluindo o problema realizado num momento de avaliação, foram realizados em grupos constituídos por dois alunos. Os alunos trabalham na maior parte das aulas a pares e então, achei que seria mais natural recolher os dados recorrendo ao mesmo formato.

Para analisar os problemas propostos terei por base o enfoque ontosemiótico, desenvolvido por Godino e seus colaboradores. “Segundo Godino *et al.* (2006), numa perspectiva ontosemiótica, a didáctica da matemática deve ter em consideração e basear-se ma natureza dos conteúdos matemáticos, no desenvolvimento cultural e pessoal, particularmente no seio das instituições escolares”. (Neto, 2009, p.8)

Para resolver problemas matemáticos estão presentes vários tipos de objectos como símbolos, gráficos, definições, propriedades, *etc.*, representados nas diferentes formas de comunicação. São estes objectos que nos permitem conhecer a estrutura e a organização dos problemas. Então, Godino e seus colaboradores, referem seis tipos de entidades primárias que permitem uma análise uma análise mais detalhada do problema: a situação problema; a linguagem (nos seus vários tipos e registos); os conceitos (tais como, definições e descrições); as proposições; os procedimentos (como algoritmos, técnicas de cálculo, métodos de resolução); e os argumentos (enunciados para validar ou explicar as proposições e os procedimentos). (Neto, 2009, p.9)

Seguidamente, serão apresentadas os três problemas de demonstração propostos aos alunos bem como uma análise da linguagem, definições e propriedades envolvidos em cada um. É ainda apresentada uma possível demonstração para cada um dos problemas não sendo, porém, esgotadas todas as hipóteses.

4.2 Problemas de demonstração propostos

Este subcapítulo tem por objectivo a apresentação da análise feita aos problemas de demonstração propostos aos alunos.

PRIMEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Se α e β são dois planos paralelos e r uma recta contida em α, então r é paralela a β.

Linguagem:

- Plano
- Recta
- Vector director de uma recta
- Vector normal ao plano

Linguagem Simbólica:

- Planos: $\alpha \ e \ \beta$
- Recta: r
- Vector director da recta r: $\vec{r}$
- Vectores normais aos planos $\alpha \ e \ \beta$: $\vec{\alpha} \ e \ \vec{\beta}$
- Planos paralelos: $\alpha \parallel \beta$
- Planos perpendiculares: $\alpha \perp \beta$
- Recta perpendicular ao plano: $r \perp \alpha$
- Recta paralela ao plano: $r \parallel \alpha$
- Vector director da recta perpendicular ao vector normal ao plano: $\vec{r} \perp \vec{\alpha}$

Definições:

- Planos paralelos
- Recta contida num plano
- Recta paralela a um plano
- Recta secante a um plano

Propriedades:

- $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{\alpha}$ é $colinear\ com\ \vec{\beta}$, onde $\alpha\ e\ \beta$ são planos e $\vec{\alpha}\ e\ \vec{\beta}$ os seus vectores normais, respectivamente
- $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, onde $\alpha\ e\ \beta$ são planos e $\vec{\alpha}\ e\ \vec{\beta}$ os seus vectores normais, respectivamente
- $r \perp \alpha \ \Leftrightarrow\ \vec{r}\ e\ \vec{\alpha}$ são colineares, onde r é uma recta e $\vec{r}$ o seu vector director, α é um plano e $\vec{\alpha}$ o seu vector normal
- $r \parallel \alpha \ \Leftrightarrow\ \vec{r} \perp \vec{\alpha}$, onde r é uma recta e $\vec{r}$ o seu vector director, α é um plano e $\vec{\alpha}$ o seu vector normal

Método de demonstração:

- Método de redução ao absurdo

Demonstração:

<u>Hipótese:</u>

- $\alpha \parallel \beta$
- r contida em α

<u>Tese:</u>

- $r \parallel \beta$

Suponhamos que $r \nparallel \beta$, então:

1) $r\ contida\ \beta$

2) $r\ secante\ \beta$ (inclui o caso particular de $r \perp \beta$)

1) se $r\ contida\ \beta$, e como por hipótese, r está contida em α, então α está contido em β, o que é absurdo, pois por hipótese $\alpha \parallel \beta$

2) se $r\ secante\ \beta$, como por hipótese, $\alpha \parallel \beta$, então r é secante a α, o que é absurdo pois, por hipótese r está contido em α.

O absurdo, resulta de supor que $r \nparallel \beta$, logo $r \parallel \beta$. ∎

<u>SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO</u>

Demonstrar, recorrendo ao método de Indução Matemática, que $\cos(n\pi) = (-1)^n, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$

Linguagem:

- Co-seno
- Redução ao primeiro quadrante
- Potências com a mesma base

Linguagem simbólica:

- $\cos \alpha$
- a^m

Definições:

- Co-seno
- Potência

Propriedades:

- $\cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$
- $a^n \times a^m = a^{m+n}$

Método de demonstração:

- Método de Indução Matemática

Demonstração

1)

Para $n = 1$:

$\cos(\pi) = -1 = (-1)^1$, Verdadeiro

2)

<u>Hipótese de Indução:</u> $\cos(n\pi) = (-1)^n$

<u>Tese de Indução:</u> $\cos\big((n+1)\pi\big) = (-1)^{n+1}$

$\cos\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi + \pi)$, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$= -\cos(n\pi)$, porque $\cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$

$= -(-1)^n$, porque $\begin{cases} \cos(n\pi) = 1, se\ n\ par \\ \cos(n\pi) = -1, se\ n\ ímpar \end{cases}$

$= (-1)^{n+1}$, pela multiplicação de potências com a mesma base.

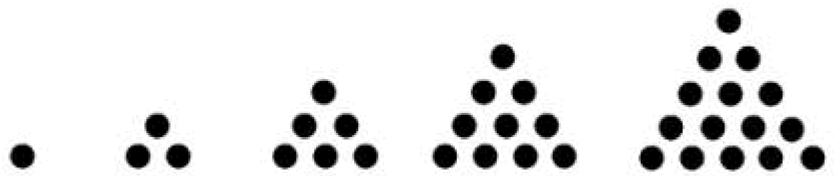
3)

Conclusão: Mostramos assim que, por hereditariedade, a igualdade $\cos(n\pi) = (-1)^n$ é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$.

■

TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Considera a sucessão (u_n) dos números triangulares, ilustrada na seguinte sequência de figuras,



cuja definição por recorrência é: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1, \end{cases}$ **para** $n \geq 1$

Demonstra, pelo método de Indução, que o termo geral desta sucessão é $u_n = \dfrac{n^2+n}{2}$**,**

para todo o $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$**.**

Linguagem:

- Sucessão
- Sucessão definida por recorrência

Linguagem Simbólica:

- u_n

Definições:

- Sucessão
- Sucessão definida por recorrência

Propriedades:

- Propriedade associativa da adição
- Propriedade comutativa da adição

Método de demonstração:

- Método de Indução Matemática

Demonstração:

1)

Para $n = 1$:

$u_1 = \frac{1^2+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, Verdadeiro

2)

Hipótese de Indução: $u_n = \frac{n^2+n}{2}$

Tese de Indução: $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2}$

$u_{n+1} = u_n + n + 1$, por definição

$= \frac{n^2+n}{2} + n + 1$, por hipótese de indução

$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$, por redução ao mesmo denominador

$= \frac{(n^2+2n+1)+n+1}{2}$, pelas propriedades associativa e comutativa da adição

$= \frac{(n+1)^2+n+1}{2}$, pelo caso notável da multiplicação: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3)

Conclusão: Por hereditariedade, podemos concluir que $u_n = \frac{n^2+n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ ■

CAPÍTULO 5 – METODOLOGIA

No presente capítulo indico as opções metodológicas e faço uma descrição dos participantes, dos instrumentos de recolha de dados e, por fim, da análise dos dados.

5.1 Opções Metodológicas

O facto deste trabalho de investigação ter por base o estudo das justificações produzidas pelos alunos enquanto demonstram sem ter sido definida, *à priori*, uma hipótese, leva a ter por base uma metodologia de natureza qualitativa. Segundo esta orientação metodológica, "estuda-se a realidade sem fragmentar e sem descontextualizar, ao mesmo tempo que se parte sobretudo dos próprios dados, e não de teorias prévias, para os compreender ou explicar (método indutivo) e se situa mais nas peculiaridades que na obtenção de leis gerais" (Almeida & Freire, 2003, pp. 101-102).

Bogdan e Biklen (1997, pp.47-51), referem que as investigações qualitativas possuem cinco características, estando estas presentes neste trabalho:

i) *Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal* – Os autores defendem que "os investigadores qualitativos frequentam os lugares de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência" (p. 48). Por tais motivos, os dados que tenho para este trabalho foram recolhidos na turma na qual desenvolvi a Prática de Ensino Supervisionada I e II.

ii) *A investigação qualitativa é descritiva* – Neste trabalho a investigação é descritiva, pois retendo descrever a forma como os alunos demonstram e as justificações que produziram nos problemas de demonstração propostos; os dados recolhidos são sob a forma de palavras ou imagens e não em forma de números. Além disso, "A palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados, como para a disseminação dos resultados" (p. 49).

iii) *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos* – Com este trabalho não pretendo focar-me nas respostas produzidas pelos alunos.

iv) *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva* – Os investigadores "não recolhem dados ou provas com o objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente, ao invés disso, as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (p. 50), tal como acontece neste trabalho, onde pretendo apenas, através da relação das produções dos alunos, dar algum contributo para a compreensão do que está a ser estudado.

v) *O significado é da importância vital na abordagem qualitativa* – Ao realizar este estudo, pretendo compreender a forma como diferentes pessoas lidam com a demonstração, bem como o significado que esta tem para cada uma delas. Assim, foi importante conhecer a turma com a qual trabalhei.

Este trabalho é de natureza qualitativa, como está justificado a cima, e tem por base um paradigma interpretativo. Como refere Erickson (1986, p.20), este tipo de abordagem diz respeito às questões de conteúdo e, está presente quando o interesse da pesquisa está centrado no significado humano na vida social e elucidação e exposição do investigador.

Segundo o mesmo autor (p.20), a investigação interpretativa tem um papel significativo na pesquisa na educação pois tem em conta a natureza da sala de aula como meio que está organizado para a aprendizagem, a natureza do ensino como um aspecto do meio de aprendizagem reflexiva e, a natureza das perspectivas e dos significados de professores e alunos, como algo que é intrínseco ao processo educativo.

A perspectiva interpretativa tem, por base, duas grandes correntes: a fenomenologia (que se preocupa em compreender o sentido dos acontecimentos e interacções das pessoas) e no interaccionismo simbólico (pois pressupõe que a experiência humana é mediada pela interpretação, sendo produto da interacção social com outras pessoas e produzidas e modificadas através de um processo interpretativo que cada pessoa vive ao lidar com os símbolos que vai encontrando no seu dia-a-dia ((Meltzer, Petras Reynolds, 1975) em (Ponte, 1994, p.9).

O meu trabalho insere-se nesta perspectiva, uma vez que pretendo interpretar os resultados produzidos por alguns alunos, de uma escola, nos problemas de demonstração propostos.

O trabalho feito, leva-me a englobá-lo num trabalho de campo. Enquanto estagiária, passei muito tempo com os alunos na escola sendo este um lugar pertencente ao quotidiano dos sujeitos sendo a recolha dos dados da pesquisa feita num ambiente natural (Bodgan & Biklen, 1997, p. 113).

"A qualidade do trabalho de campo passa pelo estabelecimento de relações, quer o método de investigação seja a observação participante, a entrevista ou a busca de documentos" (Bodgan & Bikle, 1997, p. 114). O meu trabalho passa pela análise das demonstrações produzidas por alguns alunos, da escola onde realizei a Prática de Ensino Supervisionada.

5.2. Os Participantes

Neste subcapítulo farei a descrição da escola onde recolhi os dados, bem como dos alunos e da selecção dos participantes.

5.2.1 A Escola e os Alunos

A escola onde este estudo foi realizado encontra-se na cidade de Aveiro. A cidade é capital do distrito de Aveiro e sede de um município com 199,73 Km^2 de área, subdividida em 14 freguesias, onde habitam 78463 habitantes.

A escola recebe alunos do 3º ciclo do ensino básico e alunos do ensino secundário. A estes últimos, oferece um vasto leque de cursos científico-humanísticos e profissionais; tem ainda, em horário pós-laboral, cursos de educação e formação de adultos.

A escola promove, diariamente, palestras e actividades na Biblioteca da instituição, oferecendo aos alunos a possibilidade de enriquecerem os seus conhecimentos nas mais diversas áreas. É, portanto, uma escola activa e que faz com que os alunos tenham diversas actividades extra-aulas.

Os alunos presentes no estudo pertencem uma turma do 11º ano, com quem realizei a Prática de Ensino Supervisionada. É uma turma do curso Científico-humanístico de Ciências e Tecnologia, tendo no seu plano de estudos, Matemática A.

Constituída por 30 alunos (dos quais apenas 2 raparigas), só 26 elementos estão inscritos a todas as disciplinas (4 com Espanhol e 22 com Inglês). Dos restantes alunos, 3 estão matriculados só em Física e Química e 1 está matriculado só em Matemática – estes 4 alunos entraram só este ano para a turma.

Os alunos têm idades compreendidas entre os 16 e os 18 anos, sendo a idade média de 16,9 anos. As habilitações literárias dos seus progenitores estão descritas na tabela 5.1 a seguir.

Tabela 5.1 – Habilitações literárias dos progenitores dos alunos

Habilitações Literárias de pelo menos um dos progenitores	Nº de alunos
Ensino Básico	3
Ensino Secundário	5
Licenciatura	22

Destes alunos, 22 já estavam na mesma turma desde o ensino básico e, uma pauta facultada pela secretaria da escola, mostra que:

Tabela 5.2 – Aproveitamento dos alunos no ensino básico

	%de alunos		
Nota	7ºano	8ºano	9ºano
5	40,90	27,20	22,70
4	45,50	50,00	54,50
3	13,60	22,80	22,80

Relativamente ao 10º ano de escolaridade, dados de 25 alunos revelam que apenas 3 alunos têm nota inferior a 10 à disciplina; 2 alunos obtiveram classificação de 10 valores, 2 obtiveram 12 valores, 2 obtiveram 13 valores, 2 obtiveram 14 valores, 5 obtiveram 15 valores, 3 obtiveram 16 valores, 4 obtiveram 17 valores, 1 obteve 18 valores e 1 obteve 19 valores.

5.2.3 A Selecção dos Participantes

Da turma, seleccionei quatro grupos de trabalho para proceder à análise das suas produções. Foram então seleccionados grupos com diferentes tipos de respostas – uso de diferentes métodos e estratégias de demonstração e/ou diferentes tipos de justificações.

A escolha dos quatro grupos analisados resultou de uma análise detalhada às respostas de todos os grupos. Com esta análise foi possível encontrar um conjunto mais diversificado de respostas, com o objectivo de conhecer todos os esquemas de demonstração presentes na turma em questão.

5.3 Instrumentos de recolha de dados

Um vasto leque de documentos está por trás da elaboração deste trabalho. Para conhecer melhor a turma na qual foram aplicadas os problemas de demonstração, foram recolhidos documentos na secretaria da escola e junto à direcção de turma – assim consegui compreender o aproveitamento escolar dos alunos no passado, bem como conhecer algumas características de foque mais pessoal (como a zona onde vivem, a formação dos seus pais, idade, entre outros).

Fiz também uma selecção de artigos, livros, relatórios, entre outros documentos, para conhecer os estudos que já tinham sido feitos ao nível da demonstração matemática no ensino secundário, para assim poder escrever a revisão bibliográfica e compreender em que ponto de estudo está a didáctica da Matemática relativamente ao tema da demonstração. Foram ainda consultados documentos relativos à metodologia de trabalhos de investigação.

Além dos programas de Matemática (do ensino básico e do ensino secundário), também o programa de Filosofia (relativamente ao 11º ano de escolaridade) foi minuciosamente estudado, uma vez que nesta disciplina é leccionada uma parte de Lógica Matemática, sendo assim importante conhecer as aprendizagens adquiridas pelos alunos.

Para a análise dos processos envolvidos, para conseguir responder às questões de investigação, além de notas de campo que fui registando, recolhi também as demonstrações produzidas pelos alunos, relativamente aos problemas que lhes propus em Março, isto é, no 2º período do ano lectivo 2010/1011.

Desta forma, o trabalho foi desenvolvido segundo a calendarização na tabela 5.3 a seguir:

Tabela 5.3 – Calendarização do estudo

	2010			2011										
	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov
Escolha do tema														
Revisão Bibliográfica														
Preparação dos problemas														
Metodologia														
Recolha dos dados														
Análise dos dados														
Conlusões														

5.4 ANÁLISE DOS DADOS

Como refere Bodgan e Biklen (1997, p. 205), a análise de dados é o processo de organização dos mais materiais recolhidos ao longo da pesquisa, com o objectivo de aumentar a compreensão do investigador sobre o trabalho e para apresentar o que encontrou a outras pessoas. Acrescentam ainda que essa "[…] análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros".

Os dados que vou analisar neste trabalho são as demonstrações produzidas por quatro grupos de alunos seleccionados, de entre todos os alunos da turma na qual realizei a Prática de Ensino Supervisionada, tendo também o suporte das notas que fui recolhendo ao longo da investigação. Tratando-se de uma amostra não representativa da população em estudo, começarei por fazer uma análise global dos grupos de trabalho.

Assim, de acordo com a metodologia utilizada neste trabalho, a análise dos dados será essencialmente de carácter descritivo e interpretativo. Analisando as produções dos alunos, interpretarei se o método escolhido para a realização de cada demonstração foi o adequado, se foi bem utilizado e, recorrendo à taxonomia desenvolvida nos estudos de Marrades e Gutiérrez, verificarei o tipo de justificações produzidas pelos alunos, para assim tentar concluir sobre o esquema de demonstração dos mesmos.

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE DAS RESPOSTAS AOS PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO

A primeira parte deste capítulo destina-se à descrição de uma análise global das demonstrações produzidas pelos grupos de alunos da turma em estudo, tendo como propósito dar uma ideia das diferentes produções dos grupos de alunos estudados. A segunda parte destina-se a uma análise mais detalhada das respostas de quatro grupos de alunos.

6.1 ANÁLISE GLOBAL DOS PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO

PRIMEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Neste problema era dada uma proposição para os alunos demonstrarem. Um método adequado e facilitador da demonstração da proposição, seria o de demonstração por redução ao absurdo. Contudo apenas um dos dois grupos que optaram por utilizar este método de demonstração, consegui demonstrar a proposição.

Grande parte dos grupos, tentaram demonstrar a proposição dada através das definições envolvidas nas posições relativas entre planos e posições relativas entre rectas e planos, recorrendo a vectores normais e vectores directores; um dos grupos usou um exemplo concreto mostrando que a proposição se verifica (mas apenas para esse exemplo).

Houve ainda outo grupo que referiu que a proposição era falsa, respondendo da seguinte forma: "Não porque um dos critérios de paralelismo entre rectas é a direcção que tem que ser a mesma nas duas rectas. Entre os dois planos existem infinitas rectas, que não partilham a mesma direcção".

Desta forma, analisando as produções de toda a turma, parecem existir justificações empíricas e dedutivas, passando também por esquemas de demonstração empíricos e dedutivos – existe uma única situação em que os alunos recorrem a um exemplo matemático na tentativa de demonstrarem o pretendido. Neste problema de demonstração, não estão presentes os esquemas de demonstração por convicção externa.

Apenas um grupo não respondeu ao problema de demonstração.

SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

No segundo problema de demonstração proposto aos alunos, era pedido que demonstrassem a igualdade pedida recorrendo ao método de Indução Matemática.

As respostas foram mais ou menos variadas, pois nem todos os grupos de alunos conseguiram usar o método de demonstração de forma completa. Assim há alunos que não verificam a igualdade para o primeiro número natural para a qual a igualdade é válida; muitos dos alunos não escrevem a hipótese e a tese de indução e, nenhum dos grupos escreve a conclusão final.

Esta utilização incompleta do método de Indução Matemática pode-se dever ao facto de os alunos terem de explorar o método, por si sós, através de um documento que tem a sua explicação e uma aplicação prática. Podem não ter compreendido, nesta fase, a importância de cada um dos passos do método.

Os alunos, salvo raríssimas excepções, não justificam nenhum dos passos envolvidos na demonstração. Não existem respostas erradas (de acordo com a taxonomia de Marrades e Gutiérrez), quando algum grupo recorre a exemplos é apenas no sentido de ajudar a organizar as suas ideias e justificações estando presentes, as chamadas justificações dedutivas, do tipo, experimentação pensada.

Desta forma, estão presentes nas produções dos alunos, esquemas de demonstração dedutivos e esquemas de demonstração empíricos. Neste problema de demonstração, está presente em todos os grupos, o esquema de demonstração por convicção externa autoritário, pois para conseguirem usarem o método, os alunos tinham em suporte de papel, a explicação e um aplicação do mesmo e, portanto a utilização do método dependeu da autoridade desse documento.

De forma mais ou menos completa, todos os grupos responderam ao problema.

TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Depois da recolha dos dois primeiros problemas de demonstração, analisadas acima, o método de Indução Matemática foi explicado aos alunos. Esta terceira demonstração foi pedida aos alunos num momento de avaliação, no capítulo de Sucessões do 11º ano de escolaridade.

Nota-se que as respostas são mais completas, isto é, verificam a igualdade para $n = 1$, depois de identificarem a hipótese e a tese de demonstração, demonstram a igualdade pretendida, mas ainda uma é uma minoria dos grupos de alunos que tiram, no final, as conclusões.

Os alunos não justificam cada uma das suas decisões tomadas durante a demonstração. Os esquemas de demonstração presentes são maioritariamente o simbólico referencial e o dedutivo transformacional. Há ainda um caso em que os alunos recorrem a um caso particular, a um exemplo matemático na tentativa de demonstrarem, estando presente também o esquema de demonstração empírico indutivo.

À semelhança do que aconteceu no segundo problema de demonstração, todos os grupos de alunos, de forma mais ou menos completa, produziram uma resposta.

6.2 Análise das respostas apresentadas pelos grupos

Este subcapítulo, divide-se em quatro, sendo cada um destes, destinado à análise das respostas produzidas, por quatro grupos de alunos, aos problemas de demonstração propostos.

6.2.1 Joana e Mariana

Este subcapítulo destina-se à análise das demonstrações produzidas pelo grupo de duas alunas a quem dei os nomes fictícios de Mariana e Joana. Ambas as alunas têm 16 anos de idade, e nunca ficaram retidas em nenhum ano de escolaridade, transitando sempre com positiva a Matemática.

Análise do primeiro problema de demonstração

As alunas iniciaram este problema de demonstração com alguns receios. Chamaram-me aos seus lugares e perguntaram se poderiam demonstrar partindo da negação de que "a recta r é paralela ao plano β". Eu, acreditando que estavam no caminho certo e que iam recorrer ao método de redução ao absurdo, disse-lhes que elas tinham a liberdade de demonstrar como quisessem. Elas continuaram, um pouco admiradas, dizendo que se assim fosse, iriam conseguir demonstrar a proposição "usando apenas palavras e não símbolos matemáticos".

Então as alunas apresentaram a resposta presente na figura 6.1, a seguir:

: Recorrendo à negação de r é paralela a β, chegamos à conclusão que r, apenas poderá ser secante aos planos, pois estes são paralelos; poderá estar contida no plano β; ou ainda ser perpendicular a este último:

- Se a recta r for secante a β, e uma vez que α são paralelos, a recta r também teria de ser secante a α, e por isso não podia estar contida no mesmo.
- Se a recta r estiver contida no plano β, não poderia estar contida ao mesmo tempo no plano α, sendo que estes são paralelos.
- Se a recta r for perpendicular a β, também seria perpendicular a α, pois estes são paralelos e a recta teria a mesma direcção dos vectores normais aos planos, e não estaria contida em α.

Deste modo, concluimos que a única opção é a recta r ser paralela a β e estando contida em α.

Figura 6.1 – Resposta da Mariana e da Joana ao primeiro problema de demonstração

Então as alunas, partindo da negação da tese, avaliam e elencam as possibilidades de posição relativa entre a recta e o plano, chegando a conclusão que nenhuma outra posição pode ser, além daquela que negaram inicialmente, ou seja, de que a recta r é paralela ao plano β. Embora não seja explícito, é o método de redução ao absurdo que as alunas estão a usar, uma vez que partindo da negação da tese, vão encontrando, ao longo da demonstração, absurdos – esses absurdos resultam da negação da tese que foi feita e, portanto, esta é verdadeira.

As alunas recorrem às definições (de planos paralelos, recta contida num plano, recta paralela a um plano, recta secante a um plano) e propriedades (dois planos são paralelos se e só se os seus vectores normais são colineares) previstas na planificação do problema, mas em momento algum, recorrem a uma linguagem simbólica.

As alunas vão, portanto, justificando a razão pela qual nenhuma das hipóteses encontradas (depois de negada a tese) podem ser verdadeiras, através de palavras, mas sem recorrerem ao uso de exemplos, nem como elemento de convicção nem no sentido de organizarem as suas justificações – este motivo leva-me a crer que as justificações produzidas são do tipo de dedução formal. A sequência das deduções das alunas, derivam dos dados enunciados no problema e das definições e propriedades de posições relativas entre planos e entre rectas e planos podendo estar, portanto, perante justificações transformativas e estruturais.

Como já foi referido anteriormente, existe uma relação entre esta taxonomia e a taxonomia de esquema de demonstração. Assim, pelos motivos apresentados no parágrafo anterior, avalio os esquemas de demonstração presentes na resposta dada pela Joana e pela Mariana como sendo do tipo dedutivo axiomático e transformacionais.

ANÁLISE DO SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

O segundo problema de demonstração, sugeria que a demonstração da igualdade fosse feita recorrendo ao método de Indução Matemática e as alunas usaram este método.

Começaram por verificar a igualdade para $n = 1$, embora não tenham concluído que realmente é verdade, limitando-se apenas a substituir n por 1, na igualdade dada, como se pode ver a baixo, na figura 6.2:

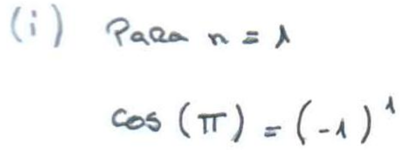
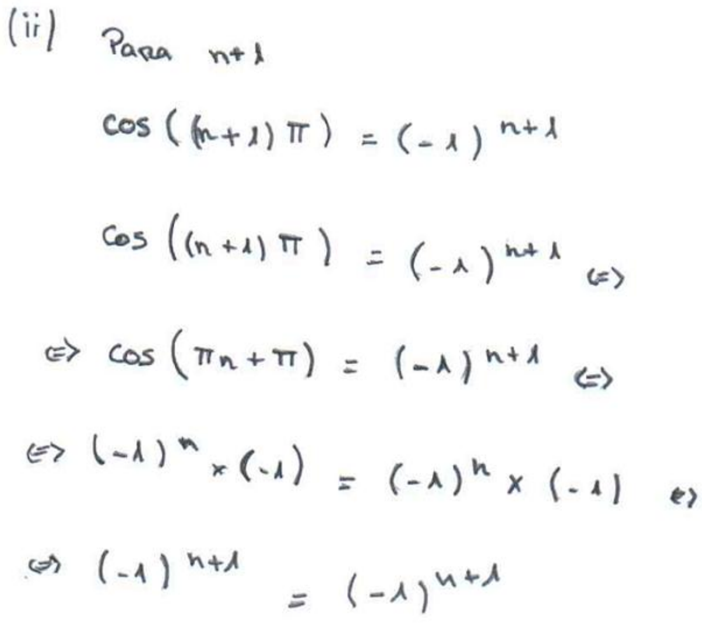


Figura 6.2 – *Caso base* da segunda resposta da Mariana e da Joana

Desta forma, pode-se ver que as alunas, acabaram por não concluir que a igualdade é, realmente, verdadeira para $n = 1$.

Seguidamente, no *passo de indução*, as alunas produziram o que se pode ver na figura 6.3:


(ii) Para n+1

$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\pi n + \pi) = (-1)^{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1)^n \times (-1) = (-1)^n \times (-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$

Figura 6.3 – *Passo de indução* da segunda resposta da Mariana e da Joana

Neste passo do método de Indução Matemática, as alunas não definiram nem a hipótese nem a tese de indução, no entanto conseguiram demonstrar o pretendido, chegando a uma igualdade verdadeira.

Como podemos ver na figura acima, as alunas partem da igualdade proposta e transformam-na numa equivalente através de sequências de operações matemáticas que envolvem definições e propriedades já estudadas, como a redução do co-seno ao primeiro quadrante, propriedades da multiplicação de potências com a mesma base.

Enquanto as alunas demonstravam o pretendido, reparei que, para perceberem que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, as alunas recorreram ao círculo trigonométrico e fizeram variar o valor de n constatando que para n par, $\cos(n\pi) = 1$ e para n ímpar, $\cos(n\pi) = -1$, chegando assim ao valor $(-1)^n$. Desta forma, a Mariana e a Joana recorreram a alguns exemplos para organizarem os seus argumentos para conseguirem demonstrar o pretendido. A meu ver, os exemplos não são considerados nas justificações, sendo o seu papel o de ajudar a prever transformações convenientes para a demonstração, o que me leva a pensar em estarmos perante um caso de justificações dedutivas, por experimentação pensada, do tipo transformativo.

Após a demonstração, as alunas concluem que a igualdade é verdadeira. No entanto, não justificam a sua veracidade recorrendo à hereditariedade, como se pode ver na figura 6.4, a seguir:

Figura 6.4 – Conclusão da segunda resposta da Mariana e da Joana

Averiguando agora sobre esquemas de demonstração presentes na resposta das alunas, terei por base, mais uma vez, a análise feita ao tipo de justificações, uma vez que as taxonomias se relacionam. Então, as alunas recorreram a exemplos para averiguarem a variação $\cos(n\pi)$, atribuindo diferentes valores naturais a n, por outro lado, recorreram a definições e propriedades para procederem a sucessivas substituições e operações matemáticas. Assim, parece que estamos perante esquemas de demonstração indutivos (devido à presença de exemplos) e esquemas de demonstração dedutivos axiomáticos.

Relembrando o que referi no capítulo 4, esta primeira demonstração em que foi pedida a utilização do método de Indução Matemática, visto este ser novidade para os alunos, foi-lhes dado um documento com a explicação e uma aplicação do método. Desta forma, a Mariana e a Joana tinham um elemento externo que se mostrava muito útil. Todos os grupos da turma, sem excepção, recorriam constantemente ao exemplo dado como aplicação do método para "reproduzirem" a sua aplicação. Então posso considerar que também estão presentes os esquemas de demonstração por convicção externa autoritário (pois tinham um recurso escrito para se orientarem) e ritual (uma vez que este método de demonstração tem uma aparência própria ao nível da forma, que também pode ter sido considerada pelas alunas).

ANÁLISE DO TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

As alunas realizaram o terceiro problema de demonstração sem qualquer dificuldade aparente. Conseguiram demonstrar o pretendido, recorrendo ao método de Indução Matemática, esquecendo-se apenas de concluir que, de facto, se prova por hereditariedade que a igualdade é válida para todo o número natural, como se pode ver na figura 6.5 abaixo:

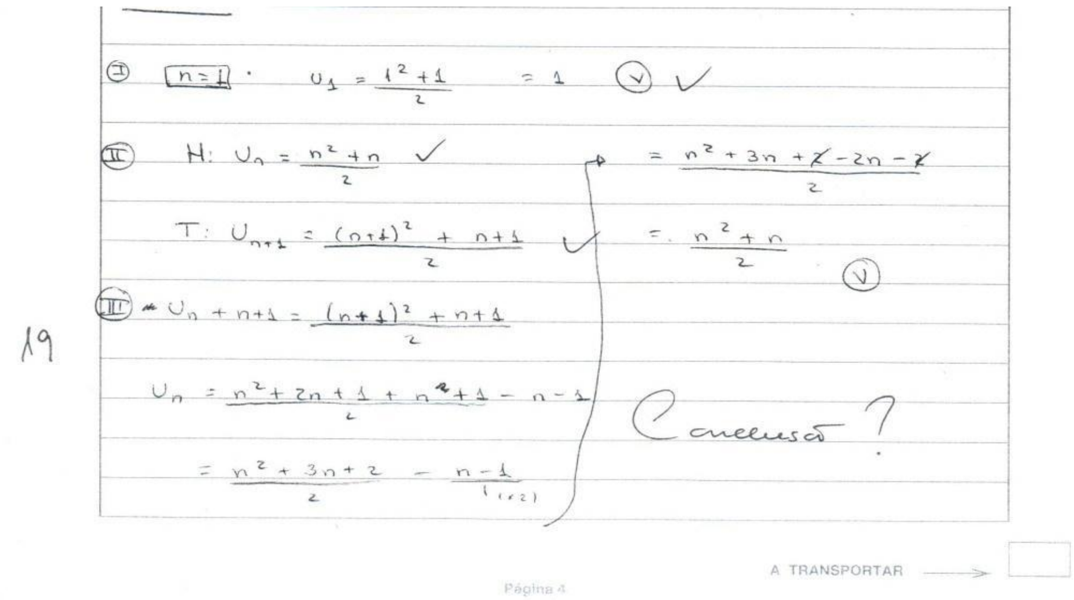


Figura 6.5 – Resposta da Mariana e da Joana ao terceiro problema de demonstração

As alunas não produziram qualquer justificação para cada uma das substituições feitas uma vez que, nesta situação também não lhes era pedido.

As alunas, no passo de indução, recorrem a técnicas de cálculo que, conseguindo chegar à igualdade pretendida. Elas representam algebricamente e manipulam símbolos nas expressões. Estes factos levam a pensar que estamos perante esquema de demonstração simbólico referencial. Por outro lado, as alunas não recorrem a casos particulares, partem de dados do problema e através de substituições, chegam à igualdade pretendida, então penso que posso dizer que também pode estar presente um esquema de demonstração dedutivo transformacional.

SÍNTESE

As alunas conseguiram estruturar as três demonstrações pedidas, sem orientações da professora. Não demonstram nenhuma falha ao nível de conhecimentos matemáticos – a categoria definida por Marrades e Gutiérrez de resposta errada nunca é encontrada. Contudo as alunas, não escrevem as justificações de cada substituição nas duas últimas demonstrações. Na primeira conseguem produzir algumas justificações, talvez pelo facto de "demonstrarem só com palavras", como referiram.

Pelas notas de campo que tirei, consegui perceber que, na segunda demonstração, as alunas recorrem a exemplos, talvez para conseguirem compreender a variação do valor do co-seno, para diferentes números naturais. O facto de recorrerem a exemplos pode mostrar que estes ajudam a organizar ideias e a compreender determinadas situações. Aceitando que as alunas recorrem a esquemas de verificação empírica para chegarem, *à posteriori*, a esquemas dedutivos podem realçar o facto de que ambos os tipos de esquemas se complementam.

A interpretação feita, mostra que, os esquemas de demonstração encontrados ao longo do trabalho destas duas alunas não são sempre da mesma natureza, isto é, dependendo da situação, encontram-se esquemas de demonstração empíricos e esquemas de demonstração dedutivos e, no caso do segundo problema, encontram-se esquemas de ambas naturezas na mesma resposta.

6.2.2 RODRIGO E ROGÉRIO

Rodrigo e Matias são os nomes fictícios dados a dois alunos da turma. São dois alunos com um aproveito muito bom à disciplina de Matemática. Este subcapítulo destina-se à análise das três demonstrações realizadas por estes dois alunos.

ANÁLISE DO PRIMEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

O Rodrigo e o Rogério discutiram bastante antes de iniciarem este problema de demonstração – concordavam com a proposição e tentavam encontrar um exemplo. Apresentaram então a resposta seguinte, apresentada na figura 6.6:

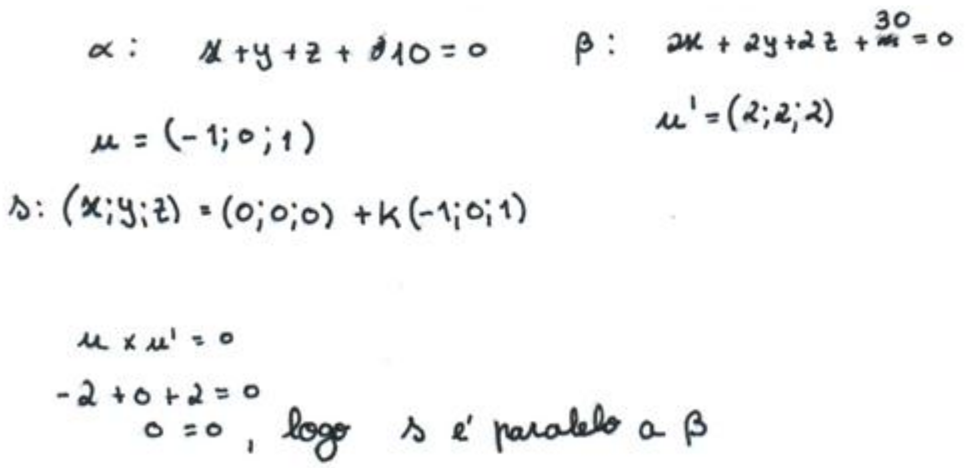


Figura 6.6 – Resposta do Rodrigo e do Rogério ao primeiro problema de demonstração

Os alunos, deram um exemplo de dois planos paralelos, de uma recta contida num deles e depois viram que a recta era paralela ao outro plano. Os alunos não demonstraram a proposição, apenas usaram um exemplo como elemento de convicção (mas que nada demonstra). Desta forma, parece que recorreram a uma justificação empírica simples, pois a conjectura foi justificada mostrando que é válida num exemplo. A justificação apresentada parece ainda ser do tipo indutivo, uma vez que os alunos recorreram a um exemplo matemático.

Uma vez que a resposta dos alunos dependeu do uso de um exemplo, de acordo com a taxonomia desenvolvida por Harel e Sowder, e indo de acordo com a taxonomia anterior, o esquema de demonstração que parece estar presente é do tipo empírico indutivo.

ANÁLISE DO SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Os alunos do grupo em análise, seguindo o método de Indução Matemática, começaram por mostrar que a igualdade a demonstrar, no segundo problema proposto, era verdadeira para $n = 1$, verificando ainda a sua veracidade para o número natural seguinte, como se pode ver na figura 6.7 abaixo.

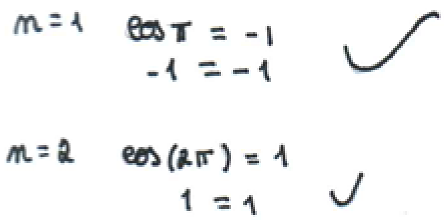


Figura 6.7 – *Caso base* da segunda resposta do Rodrigo e do Rogério

Seguidamente foram averiguar sobre o que acontecia para um número natural $n + 1$. Contudo deveriam ter definido a hipótese e a tese indução, pois deveriam mostrar que se a igualdade é válida para o inteiro n, também o é, por hereditariedade, para o inteiro $n + 1$.

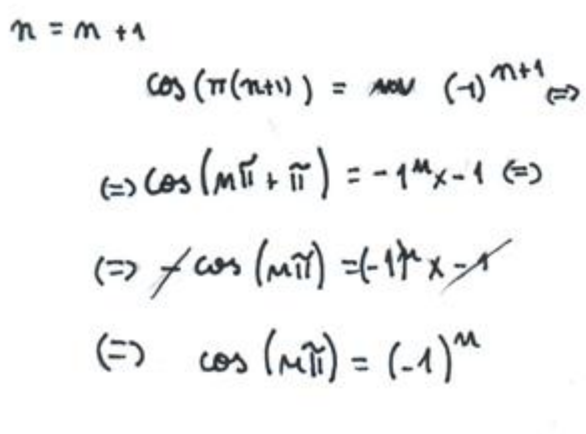


Figura 6.8 – *Passo de indução* da segunda resposta do Rodrigo e do Rogério

Os alunos partem da igualdade para $n = n + 1$, chegando a uma igualdade que é verdadeira, por hipótese de indução (chegam à própria hipótese).

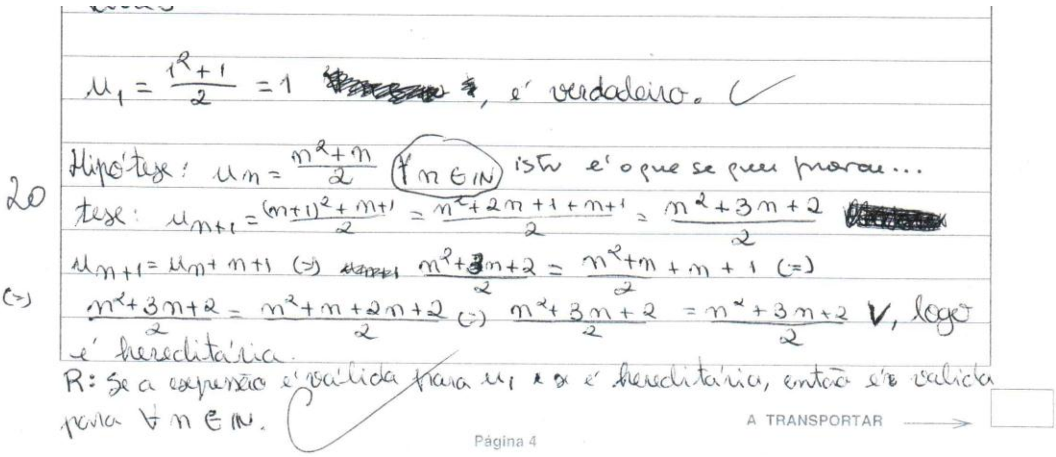
Apresentam um erro de escrita matemática, já que na segunda e terceira equivalência escrevem dois sinais seguidos, que deviam estar separados por parênteses.

Através da interpretação da produção dos alunos subentende-se que eles não recorrem a qualquer exemplo mas baseiam-se em operações, partindo de dados do problema de demonstração proposto e relacionando propriedades matemáticas já estudadas e aceites neste nível de escolaridade (como a redução do co-seno ao primeiro quadrante e o produto de potências com a mesma base).

À semelhança do que aconteceu com o outro grupo analisado, mais do que um esquema de demonstração parece estar envolvido nesta situação. Por um lado, parece estar presente um esquema de demonstração dedutivo axiomático, pelas razões apresentadas no parágrafo acima. Por outro lado, os alunos também tinham na sua posse um elemento externo que os ajudava nesta demonstração – um documento com a explicação e uma aplicação do método de Indução Matemática – podendo estar presente, também, um esquema de demonstração por convicção externa autoritário e ritual.

ANÁLISE DO TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Como se pode verificar na figura 6.9 abaixo, os alunos, nesta segunda fase, conseguiram utilizar o método de demonstração matemática de uma forma mais completa e correcta.


$u_1 = \frac{1^2+1}{2} = 1$, é verdadeiro.

Hipótese: $u_n = \frac{n^2+n}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) isto é o que se quer provar...

20

tese: $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

$u_{n+1} = u_n + n + 1 \Leftrightarrow \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + n + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$ V, logo é hereditária.

R: Se a expressão é válida para u_1 e se é hereditária, então é válida para $\forall n \in \mathbb{N}$.

A TRANSPORTAR →

Página 4

Figura 6.9 – Resposta do Rodrigo e do Rogério ao terceiro problema de demonstração

Os alunos começaram pela verificação para $n = 1$, seguidamente definiram a hipótese e a tese de indução, passando depois para a demonstração da tese e, finalmente, concluíram que é válida para todos os números naturais – passando assim pelos três passos previstos: caso base, passo de indução e conclusão. Contudo existiu alguma confusão na definição da hipótese de indução, uma vez que afirmaram que a expressão era válida para todo o número natural e isso é o que se pretende provar.

À semelhança do que aconteceu anteriormente, os alunos deste grupo não produzem qualquer justificação ao longo das várias substituições na sua demonstração. Os esquemas de demonstração que parecem estar evidenciados nesta resposta dos alunos são: esquema de demonstração simbólico referencial e esquema de demonstração dedutivo transformacional. O primeiro está presente, pois os alunos representam algebricamente e manipulam símbolos nas expressões, efectuando os cálculos necessários para chegarem à demonstração pretendida; o segundo, porque o grupo não recorre a casos particulares e o processo de demonstração é feito, através de sucessivas substituições até chegarem ao pretendido.

Síntese

Analisando as respostas dos alunos aos três problemas de demonstração propostos, encontra-se uma evolução no sentido positivo do seu desempenho. Eles começam por apresentar, no primeiro problema, um caso particular da proposição dada, o que nada demonstra. Seguidamente, já conseguem construir uma demonstração próxima daquela que seria completamente aceite, deixando para trás a ingénua ideia de que um caso particular pode provar que determinada conjectura é válida. As falhas encontradas nesta segunda resposta são, então, ao nível da utilização do método de Indução Matemática. Estas falhas podem ter sido causadas por conflitos ao nível da compreensão do documento que explicava o referido método, ou então devido à falta de tempo, pois os alunos demoraram muito tempo a responder ao primeiro problema, como registei nas minhas notas de campo. Após a realização destes dois problemas, o método foi explicado pela professora e foram realizadas demonstrações em sala de aula que envolviam este mesmo método e, então, este pode ter sido um dos motivos, pelo qual os alunos conseguiram utilizar o método de Indução Matemática correctamente no momento de avaliação – terceiro problema de demonstração aqui analisado.

De salientar que, ao longo do trabalho destes dois alunos, eles nunca responderam incorrectamente em nenhum dos problemas, isto é, a categoria de resposta errada não está presente em nenhuma das respostas dos alunos. Contudo parece que os alunos recorreram a um esquema de demonstração empírico indutivo, na primeira demonstração (já que usaram um exemplo matemático). Seguidamente, a meu ver, variaram entre esquemas de demonstração de convicção externa e esquemas de demonstração dedutivos.

Os alunos deste grupo não têm o hábito de construírem justificações nos sucessivos passos das suas respostas.

6.2.3 Manuel e João

Este capítulo destina-se para a análise dos dados recolhidos no grupo do Manuel e do João. Estes são nomes fictícios para dois alunos da turma, com idades entre os 16 e os 17 anos. Os alunos em questão transitaram sempre de ano, sempre com nota positiva a Matemática.

Análise do primeiro problema de demonstração

Para demonstrar o primeiro problema proposto, os alunos Manuel e João, não utilizaram o método de redução ao absurdo. Então, partindo de dados do problema (tomaram como pressuposto as hipóteses dadas – $\alpha\ e\ \beta$ são dois planos paralelos e r uma recta contida em α) e através de operações mentais e deduções lógicas que derivam de um conjunto de definições e propriedades aceites, demonstram a proposição. As definições usadas são as de planos paralelos, recta perpendicular a um plano e recta paralela ao plano; as propriedades usadas pelos alunos são: dois planos são paralelos se e só se os seus vectores normais são colineares, uma recta é perpendicular a um plano se o seu vector normal ao plano e o vector director da recta são colineares; uma recta é paralela a um plano, se o vector director da recta e o vector normal ao plano são perpendiculares. A resposta dos alunos está representada na figura 6.10, a seguir:

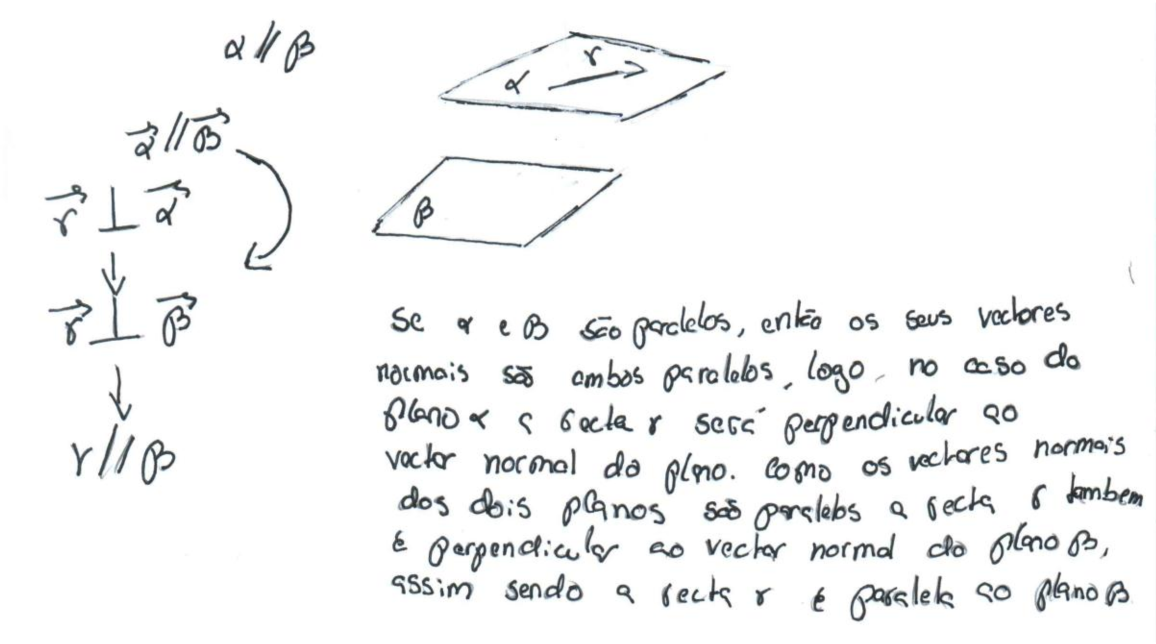


Figura 6.10 – Resposta do Manuel e do João ao primeiro problema de demonstração

Pelos motivos apresentados no parágrafo anterior, os alunos recorrem a justificações que envolvem conceitos já adquiridos neste nível de escolaridade e, portanto, parecem ser do tipo dedutivo formal estrutural. Pelos mesmos motivos, o esquema de demonstração presente nesta resposta, segundo a minha interpretação, será um esquema de demonstração dedutivo axiomático.

ANÁLISE DO SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

A reposta dos alunos Manuel e João ao segundo problema de demonstração, está representada na figura 6.11 a baixo:

$$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1} \Leftrightarrow -\cos(\pi n) = (-1)^{n} \cdot (-1)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\cos(\pi n) = (-1)^{n}}$$

Figura 6.11 – Resposta do Manuel e do João ao segundo problema de demonstração

Como se pode observar, os alunos não usam adequadamente o método de Indução Matemática. Não provam a igualdade para o caso base, isto é, para $n = 1$; não definem hipótese e tese de indução embora tentem reproduzir o passo de indução fazendo substituições na igualdade; mas não podem concluir que, por hereditariedade, a igualdade é válida para todo o número natural.

Contudo, analisando a produção dos alunos, pode ser que esteja presente um esquema de demonstração dedutivo axiomático e transformacionais – os alunos recorrem a propriedades para executarem sucessivas substituições. Pode também ainda estar presente o esquema de demonstração por convicção externa autoritário e ritual, pelos mesmos motivos apresentados para os dois grupos anteriores – os alunos tinham na sua posse um documento de consulta que continha uma explicação e uma aplicação do método de Indução Matemática

.

ANÁLISE DO TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

Relativamente ao terceiro problema de demonstração, os alunos produziram a resposta presente na figura 6.12, abaixo:

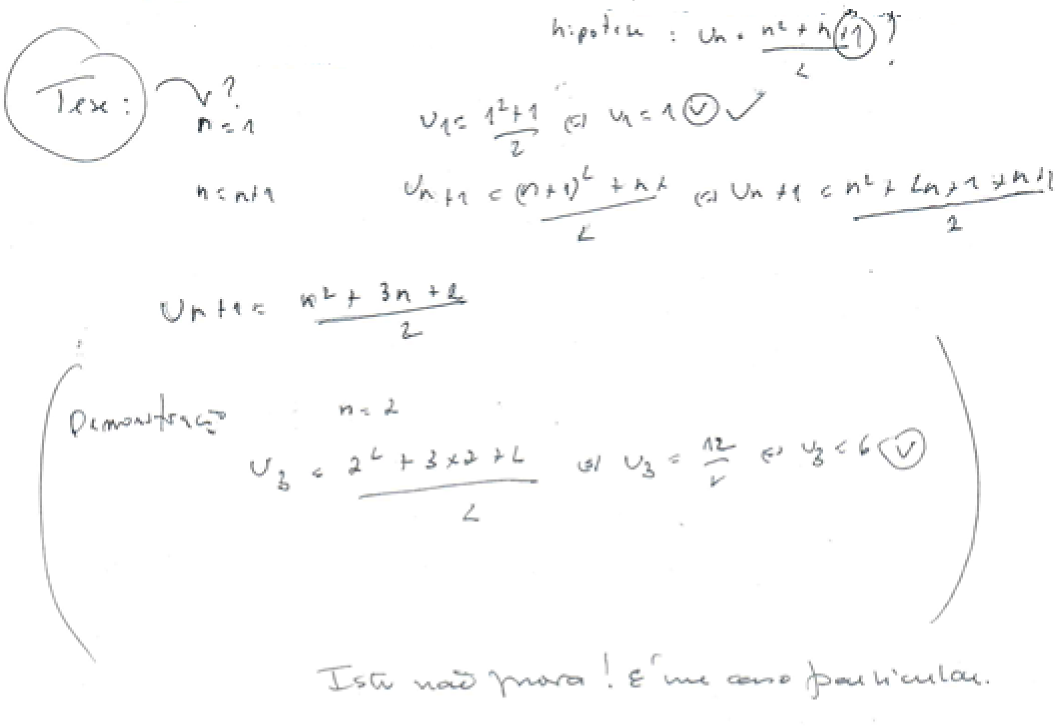


Figura 6.12 – Resposta do Manuel e do João ao terceiro problema de demonstração

Os alunos, de forma um pouco desorganizada, provam a validade da igualdade para $n = 1$. Tentam também definir a hipótese de indução, embora não o consigam fazer correctamente, e não definem a tese de indução – há aqui algum conflito uma vez que os alunos identificam que $n = 1$ faz parte da tese.

Os alunos ainda desenvolveram o termo de ordem $n + 1$, mas não conseguiram concluir a demonstração. Talvez tivessem conseguido se, inicialmente tivessem identificado a hipótese e a tese correctamente, já que andam perto de chegarem a tese. Então, os alunos recorreram a um caso particular (para $n = 2$, ou seja, $n + 1 = 3$) substituindo na igualdade a que tinham chegado para o termo de ordem $n + 1$ e verificando que a igualdade era verdadeira para esse mesmo valor. Os alunos nada demonstraram e recorreram a uma justificação empírica, parecendo ser um empirismo simples (recorre a um exemplo na tentativa de mostrar a veracidade do problema) e do tipo indutivo (pois o exemplo usado é matemático – substitui a ordem por 2, verificando que o termo era o esperado). Por estes mesmos motivos, segundo a taxonomia para o esquema de demonstração o que parece estar presente nesta produção dos alunos é o empírico indutivo.

SÍNTESE

De acordo com as respostas produzidas pelos alunos, verifica-se que conseguiram uma melhor produção ao nível do primeiro problema. Estes alunos têm, no seu plano curricular, Geometria Descritiva, o que também os pode ter ajudado a compreender a proposição. Quando partem para demonstrações recorrendo ao método de Indução Matemática, as dificuldades começam a surgir: na primeira demonstração por Indução, é notável que os alunos deste grupo não compreenderam o método, na segunda demonstração por Indução pedida, os alunos cometem o usual erro de usarem um caso particular para demonstrarem a igualdade e isto não é possível, pois o caso particular não permite a demonstração da proposição para todo o número natural.

Desta forma, algumas das justificações produzidas pelos alunos têm carácter dedutivo e, outras empírico. Os esquemas de demonstração presentes nas três produções dos alunos também passam pelo tipo indutivo e dedutivo.

6.2.4 AQUILINO E MATEUS

Este capítulo destina-se à análise das respostas produzidas por dois alunos, de nomes fictícios Aquilino e Mateus. Os alunos em questão sempre transitaram de ano, com nota positiva à disciplina de Matemática.

<u>ANÁLISE DO PRIMEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO</u>

Os alunos consideraram que a proposição dada no primeiro problema de demonstração era falsa e, portanto, a resposta, presente na figura 6.13, foi a seguinte:

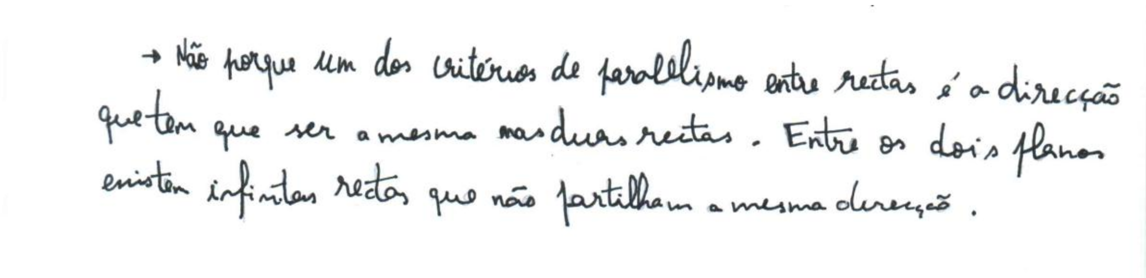

→ Não porque um dos critérios de parallelismo entre rectas é a direcção que tem que ser a mesma nas duas rectas. Entre os dois planos existem infinitas rectas que não partilham a mesma direcção.

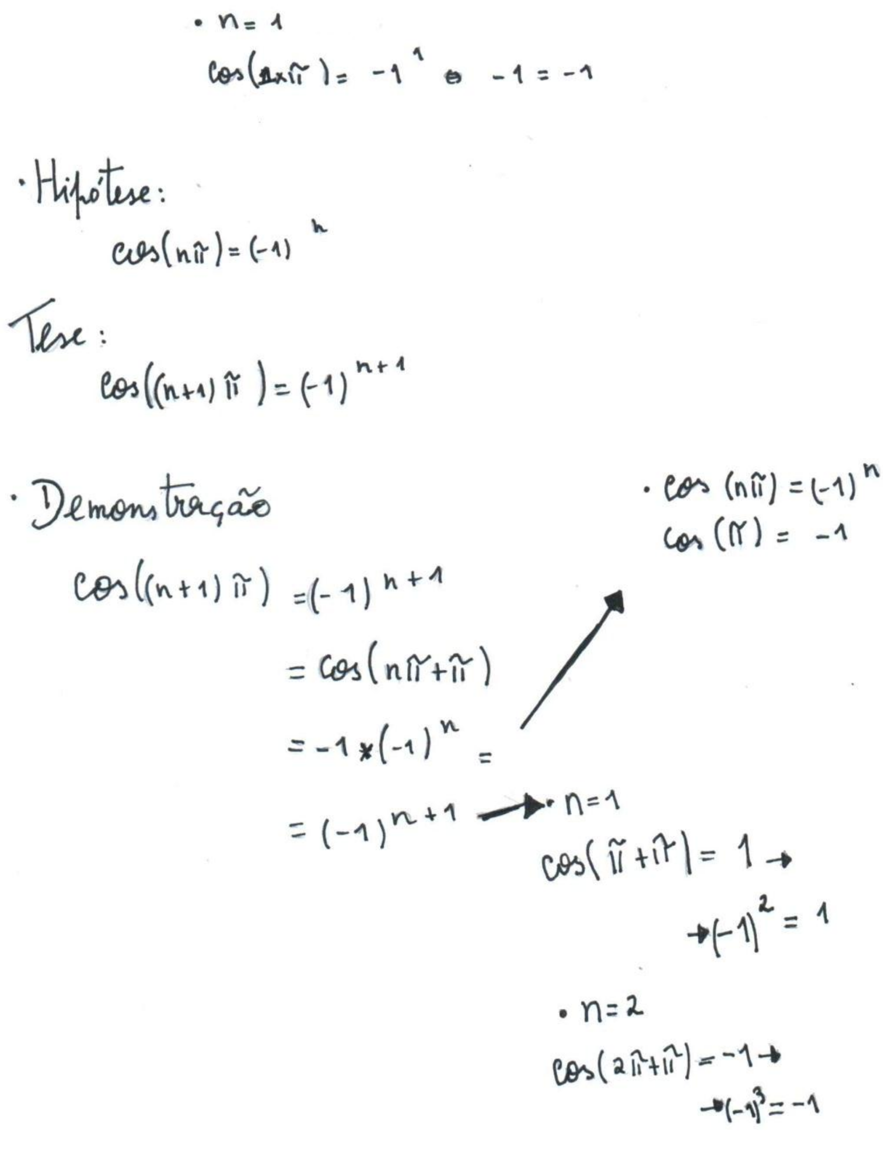
Figura 6.13 – Resposta do Aquilino e do Mateus ao primeiro problema de demonstração

Desta forma, segundo a taxonomia desenvolvida por Marrades e Gutiérrez, a resposta é errada, já que os alunos não conseguem produzir uma justificação correcta.

De acordo com a taxonomia desenvolvida por Harel e Sowder (2007) para o esquema de demonstração, não existe uma categoria para uma situação como esta. Eles não prevêem a possibilidade de existir uma resposta incorrecta.

ANÁLISE DO SEGUNDO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

No segundo problema de demonstração, os alunos Aquilino e Mateus, usaram os dois primeiros passos do método de Indução Matemática – caso base e passo de indução – correctamente, esquecendo-se apenas de, no final, concluir que a por hereditariedade, a igualdade é verdadeira para todo o número natural, como se pode ver na figura 6.14 a seguir:


• $n = 1$

$\cos(1 \times \pi) = -1^1 \Leftrightarrow -1 = -1$

· Hipótese:

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

Tese:

$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

· Demonstração

$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

$= \cos(n\pi + \pi)$

$= -1 \times (-1)^n =$

$= (-1)^{n+1}$

• $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\cos(\pi) = -1$

• $n = 1$

$\cos(\pi + \pi) = 1 \rightarrow (-1)^2 = 1$

• $n = 2$

$\cos(2\pi + \pi) = -1 \rightarrow (-1)^3 = -1$

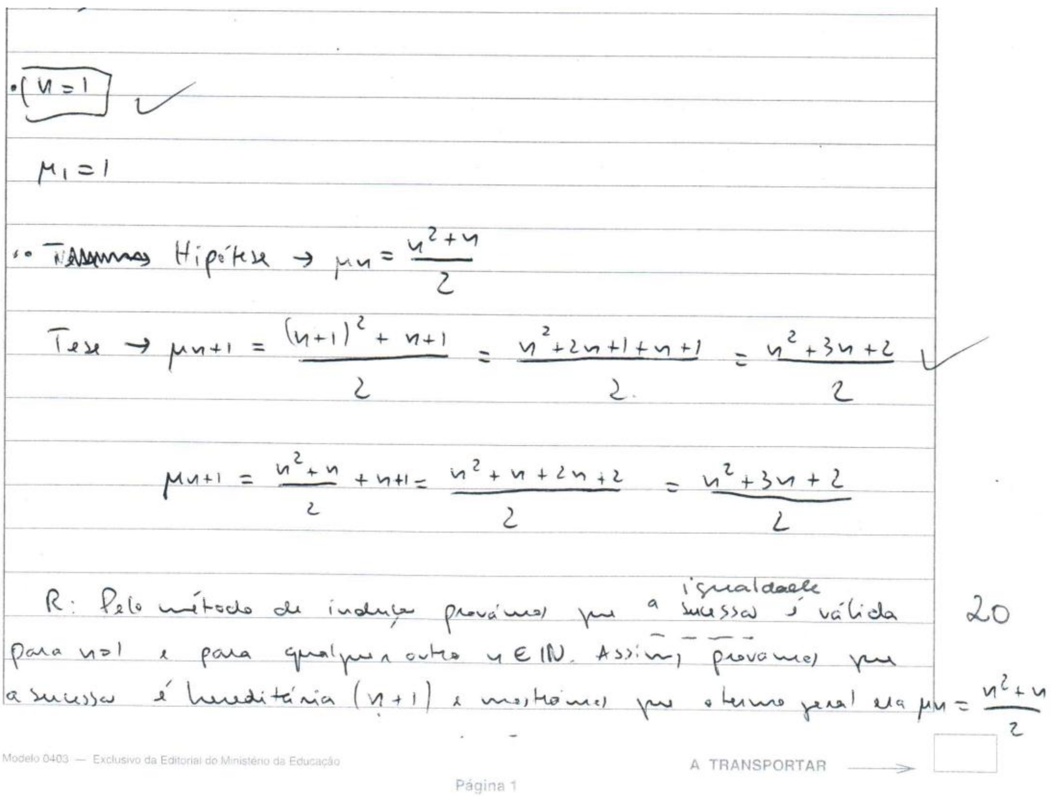
Figura 6.14 – Resposta de Aquilino e Mateus ao segundo problema de demonstração

Durante a demonstração, os alunos recorreram a justificações dedutivas formais estruturais ($\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\cos(\pi) = -1$), já que estão envolvidas propriedades já conhecidas pelos alunos. Ao mesmo tempo, parece que estas justificações também podem ser transformativas, uma vez que ajudam na previsão da transformação necessária na próxima etapa de demonstração, para se conseguir chegar ao que se pretende.

Pelos mesmos motivos que me levaram a concluir sobre o tipo de justificações produzidas, parece que estão envolvidos nesta resposta dos alunos, esquemas de demonstração do tipo dedutivo transformacional e axiomático. Como aconteceu com os grupos anteriores, estes alunos também tinham na sua posse um elemento de convicção externa – um documento com o método de Indução Matemática – também podendo estar presentes esquemas de demonstração por convicção externa autoritário e ritual.

ANÁLISE DO TERCEIRO PROBLEMA DE DEMONSTRAÇÃO

No momento de avaliação, quando lhes foi dada o terceiro problema de demonstração, os alunos deste grupo de trabalho conseguiram usar o método de Indução Matemática correctamente. Verificaram a igualdade para $n = 1$, definiram hipótese e tese de indução, demonstraram a igualdade pedida, e concluíram acerca da sua validade, como se pode ver na figura 6.15, abaixo:



$\boxed{n=1}$ ✓

$u_1 = 1$

~~Tomamos~~ Hipótese → $u_n = \frac{n^2+n}{2}$

Tese → $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$ ✓

$u_{n+1} = \frac{n^2+n}{2} + n+1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

R: Pelo método de indução provámos que a sucessão igualdade é válida para $n=1$ e para qualquer outro $n \in \mathbb{N}$. Assim, provamos que a sucessão é hereditária $(n+1)$ e mostramos que o termo geral era $u_n = \frac{n^2+n}{2}$ 20

Modelo 0403 — Exclusivo da Editorial do Ministério da Educação A TRANSPORTAR →

Página 1

Figura 6.15 – Resposta do Aquilino e do Mateus ao terceiro problema de demonstração

Os esquemas de demonstração presentes parecem ser do tipo simbólico referencial, uma vez que os alunos representam algebricamente e manipulam símbolos nas expressões, chegando assim à demonstração da igualdade pretendida, e esquemas de demonstração transformacionais, uma vez que os alunos recorrem a sucessivas transformações para concluírem a demonstração pretendida, não recorrendo, aparentemente, ao uso de exemplos.

SÍNTESE

Os alunos deste grupo de trabalho começaram com uma resposta errada, relativamente ao primeiro problema de demonstração.

Contudo, mudaram de comportamento nos dois problemas seguintes. Conseguiram aplicar o método de Indução Matemática, desde a primeira vez que lhes foi pedido o seu uso, produzindo, segundo a minha interpretação, justificações dedutivas formais estruturais e dedutivas formais transformativas. Na terceira demonstração pedida, conseguiram mesmo pontuação máxima (esta questão foi avaliada quantitativamente porque foi introduzida numa questão aula para avaliação). Desta forma, estão presentes nas suas demonstrações, além da resposta errada, esquemas de demonstração dedutivos transformacionais, axiomáticos e simbólico referencial.

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo, seguido das principais conclusões que posso tirar no sentido de responder às questões de investigação. Por fim, faço uma reflexão a nível mais pessoal, sobre o que significou este estudo para mim, sobre as potencialidades e limitações deste estudo.

7.1 Síntese do Estudo

No presente estudo, tenho como principal objectivo o de compreender a forma como os alunos respondem a problemas de demonstração propostos. Pretendo analisar se os alunos utilizam adequadamente os diferentes métodos de demonstração e qual o esquema de demonstração presente nas suas respostas. Assim sendo, desejo responder às seguintes questões de investigação:

i) Os alunos conseguem escolher e usar adequadamente diferentes métodos de demonstração?

ii) Qual (ou quais) o(s) esquema(s) de demonstração dos alunos?

Reconhecendo a importância da demonstração na Matemática, proponho aos alunos três problemas de demonstração, uma apelativa ao uso do método de demonstração por redução ao absurdo, uma para introduzir o método de Indução Matemática envolvendo conceitos de trigonometria e, por fim, uma outra também para uso do método de Indução Matemática, mas após este ter sido explicado aos alunos, envolvendo conceitos de sucessões.

No quadro teórico abordo os temas fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, isto é, o que se entende por demonstração matemática e o esquema de demonstração segundo Harel e Sowder (2007). Para tal, recorro a várias obras de autores que desenvolveram estudos nesta área como Balacheff, Mariotti, Marrades e Gutiérrez, Duval, Neto e De Villers. Revejo ainda as aprendizagens dos alunos ao nível de Lógica

Matemática na disciplina de Filosofia, e descrevo os métodos de demonstração matemática e as tautologias que estão por trás de cada um deles.

Relativamente à metodologia, trata-se de um trabalho de campo, de natureza qualitativa e interpretativa. Os participantes neste trabalho são os alunos da turma de 11º ano na qual desenvolvi as disciplinas Prática de Ensino Supervisionada I e II e, depois de uma análise global, foram seleccionados as respostas produzidas por quatro grupos de alunos, tendo em conta diferentes tipos de resposta – isso de diferentes métodos/estratégias de demonstração, diferentes justificações/esquemas de demonstração. A análise e interpretação das respostas produzidas pelos alunos foi feita tendo por base as respostas dos alunos e notas de campo que fui recolhendo ao longo do ano lectivo.

7.2 Conclusões do Estudo

Neste subcapítulo pretendo organizar as conclusões sobre o estudo efectuado, tentando responder às questões de investigação, tendo em atenção que qualquer conclusão tirada não pode ser generalizada, uma vez que o estudo não foi feito com uma amostra representativa de alunos do 11º ano do ensino secundário.

Relativamente ao primeiro problema de demonstração proposto, o grupo da Mariana e da Joana recorreram ao método de demonstração por redução ao absurdo, enquanto o grupo do Manuel e do João optaram por demonstrar a proposição de forma directa, isto é, partindo da hipótese e recorrendo a definições e propriedades matemáticas, conseguiram concluir que a tese é verdadeira. Desta forma, segundo a minha interpretação, estamos perante esquemas de demonstração dedutivos transformacionais e axiomáticos.

Os alunos Rodrigo e Rogério, recorreram a um caso particular, isto é, encontraram dois planos $\alpha\ e\ \beta$ paralelos e uma recta contida em α e, seguidamente, verificaram que o produto escalar entre o vector director da recta e o vector normal ao plano β é igual a zero (ou seja, são perpendiculares), concluindo assim que a recta é paralela ao plano. Os alunos encontraram, então, um raciocínio que lhes poderia ter sido útil para a demonstração da proposição. Contudo teriam de recorrer a vectores arbitrários, que generalizassem a situação, isto é, os vectores utilizados deveriam ser representativos de toda e qualquer situação e não de uma situação específica. Assim, os alunos mostraram apenas que a proposição é válida para o exemplo por eles encontrado (para aqueles planos e aquela recta), parecendo então estar presente um esquema de demonstração empírico indutivo.

Por fim, os alunos Aquilino e Mateus, responderam erradamente ao problema, dizendo que a proposição era falsa. Pela minha interpretação da sua resposta, parece-me que os alunos compreenderam mal a proposição, uma vez que não tentam justificar o *não* paralelismo entre uma recta e um plano, mas entre rectas de dois planos paralelos. Os alunos, uma vez que acreditavam na falsidade da proposição, podiam encontrar um contra-exemplo – ao não conseguirem encontrar um contra-exemplo, podia ser que começassem a duvidar do valor lógico que lhe estavam a atribuir. Contudo, a resposta produzida pelos alunos insere-se na categoria de “resposta errada” segundo a taxonomia desenvolvida por Marrades e Gutiérrez num estudo de 2000. Como já referi na análise dos dados destes dois alunos, Harel e Sowder não prevêem este tipo de resposta.

Os outros dois problemas de demonstração propostos aos alunos eram destinados ao uso do método de Indução Matemática. Como este método era novo para os alunos, juntamente com o problema, foi-lhes dado um documento com a explicação e uma aplicação do método. Desta forma, assumi que, em todas as respostas a este problema de demonstração, poderá estar presente um esquema de demonstração por convicção externa autoritário e ritual.

Das quatro respostas dadas ao segundo problema analisadas, a mais completa é a das alunas Mariana e Joana – as alunas tentaram reproduzir as três “etapas” do método: caso base, passo de indução e conclusão – seguido do grupo do Aquilino e do Mateus que se esqueceram apenas de tirar conclusões no fim da demonstração. O Rodrigo e o Rogério não definiram hipótese nem tese de indução e não tiraram qualquer conclusão no final. Por fim, o Manuel e o João pegaram apenas na igualdade dada, substituíram n por $n+1$, chegando à hipótese, embora não tivesses definido nem a hipótese nem a tese de indução, não verificaram a igualdade para $n = 1$ não podendo, portanto, concluir que a igualdade é válida para todo o número natural.

Notaram-se algumas dificuldades na utilização do método, podendo terem sido causadas pela incompreensão do documento que lhes foi facultado.

Relativamente aos esquemas de demonstração, a meu ver, além de esquemas por convicção externa, também estiveram presentes esquemas de demonstração dedutivos axiomáticos e transformacionais. As alunas Mariana e Joana, recorreram ao círculo trigonométrico para compreenderam a variação de $\cos(n\pi), n\epsilon\mathbb{N}$, atribuindo diferentes valores naturais a n. Desta forma, os exemplos podem ter ajudado as alunas a organizarem as suas ideias e, consequentemente, ajudar na construção da demonstração. Desta forma, também podem estar presentes, esquemas de demonstração empírica indutiva. Este facto entra em concordância com Harel e Sowder (2007, p.817) quando referem que é inevitável o uso de esquemas de demonstração empíricos, pois os exemplos ajudam a criar ideias.

Antes da realização do problema de demonstração, o método de Indução Matemática foi explicado aos alunos, sendo então de esperar que, na realização deste último problema, os alunos utilizassem o método de uma forma mais completa.

A Mariana e a Joana, esqueceram-se da conclusão final; os grupos de Aquilino e Mateus e de Rodrigo e Rogério utilizaram o método de forma completa e correcta. Os esquemas de demonstração encontrados nestes três grupos, de acordo com a minha interpretação, foram esquemas de demonstração simbólica referencial e esquemas de demonstração dedutivos transformacionais.

O grupo do Manuel e do João, que tinham a resposta anterior mais incompleta, mostraram alguma confusão na definição da hipótese e da tese de indução; desta vez já verificaram a igualdade para $n = 1$; mas, no passo de indução do método de indução usaram um caso particular, isto é, mostraram que a igualdade é válida para $n = 2$, levando-me a crer que estamos perante um esquema de demonstração empírico indutivo.

Com isto, não posso concluir que cada grupo de alunos demonstra segundo um esquema específico, pois vão variando de demonstração para demonstração e, muitas vezes, estão presentes vários esquemas numa mesma demonstração. Esta conclusão vai de encontro a conclusões tiradas em estudos realizados por Marrades e Gutiérrez (2000), que afirmam que é comum os alunos variarem entre justificações empíricas e dedutivas, ao longo de um problema.

7.3 Reflexão Final

A realização deste estudo, mesmo não trazendo generalizações que possam ser úteis ao nível da didáctica da demonstração matemática, trouxe vantagens quer para a minha pessoa, quer para professores de Matemática e até mesmo para os alunos envolvidos.

O trabalho desenvolvido permitiu um aprofundamento dos meus conhecimentos ao nível da didáctica da demonstração matemática, fez-me compreender que o sucesso ao nível da demonstração matemática depende de uma combinação harmoniosa de vários factores – cognitivos, pessoais, sociais, históricos, *etc*. Compreendi, assim, a importância dos estudos que têm sido desenvolvidos ao nível do ensino e da aprendizagem da demonstração matemática, mais precisamente, sobre o *esquema de demonstração*. A importância de conhecer os esquemas de demonstração dos alunos, está directamente ligada à forma como o professor pode trabalhar com os alunos, para ser possível melhorar o seu desempenho ao nível da demonstração matemática. É interessante pensar que o facto de muitas vezes recorrermos a exemplos ou casos específicos antes da generalização pode ter uma relação com factos históricos, isto é, com a forma como a Matemática foi evoluindo ao longo da história dos povos.

Para os professores de Matemática, o presente trabalho permite-lhes também que aprofundem os seus conhecimentos sobre a demonstração matemática. Podem recorrer ao trabalho para aprofundarem os conhecimentos sobre os métodos de demonstração matemática e, sobre as tautologias que estão na sua base, bem como promoverem a articulação com a disciplina de Filosofia. O trabalho pode-lhes ainda ser útil no sentido de conhecerem trabalhos desenvolvidos no campo da investigação no âmbito do ensino e da aprendizagem da demonstração matemática.

Para os alunos envolvidos no estudo, os problemas propostos, além de lhe trazerem algumas aprendizagens, permitiram o desenvolvimento do seu raciocínio. O primeiro problema de demonstração recorreu ao método de indução matemático serviu para familiarizar os alunos com o mesmo, que será utilizado seguidamente no capítulo de sucessões. Além disso, este trabalho alertou os alunos para da importância que tem a demonstração na Matemática.

A realização deste trabalho não foi um processo fácil. Senti várias dificuldades, em quase todas as etapas. É difícil fazer um trabalho de investigação, principalmente quando se é principiante, quando as bases são poucas e quando o tempo é limitado. O factor tempo foi, sem dúvida, o que criou mais limitações na realização deste trabalho. A dissertação deve ser realizada em simultâneo com a Prática de Ensino Supervisionada e esta é, por si só, uma disciplina à qual tive de dedicar muito tempo. A fase de escolha e selecção dos problemas foi muito complicada, porque coincidiu com uma altura de muito trabalho de planificação leccionação de aulas, mas tudo foi superado com a ajuda das minhas orientadoras.

Gostaria de ter tido mais tempo para conseguir realizar entrevistas aos grupos analisados, para poder compreender melhor o porquê de terem procedido de tal forma. Foi limitativo também o facto de não poder gravar as discussões dos alunos, durante a realização dos problemas de demonstração, pois assim teria presente a forma como se *persuadem* sendo mais fácil a compreensão dos esquemas de demonstração presentes nos seus trabalhos – este seria um factor enriquecedor do trabalho. Deveria também ter recolhido demonstrações produzidas pelos alunos ao longo do ano, nos diferentes temas estudados, ajudando-os a desenvolver o hábito de produzirem justificações – este foi, sem dúvida um trabalho que não foi feito devido a falta de tempo.

Na minha opinião, o trabalho correria melhor, se fosse começado no ano lectivo anterior, tendo, no início do ano lectivo seguinte, os problemas de demonstração planeados bem como a calendarização de todo o estudo. Estes serão aspectos a ter em consideração no futuro, quer como professora quer como investigadora.

Reflectindo sobre o trabalho vejo que é realmente muito importante desenvolver nos alunos, desde o primeiro ciclo, o hábito de justificar as suas ideias, de demonstrarem (embora de forma menos elaborada) as suas convicções, tornando os alunos cada vez mais críticos e desenvolvendo neles o hábito de pensarem por si mesmos, de procurarem, conjecturarem e demonstrarem. É necessário preparar os alunos que estes "no final do ensino secundário [...sejam] capazes de compreender e produzir uma demonstração matemática" (NCTM, 2001, p.61), para conseguirmos contrariar os estudos de Harel e Sowder (2007, p. 806) que reconhecem que geralmente os estudantes do ensino secundário têm uma fraca *performance* relativamente à demonstração matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M., & Freire, T. (2003). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação.* Braga: Psiquilibrios.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3, n.3*, pp. 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18, n.2*, pp. 147-176.

Balacheff, N. (Agosto de 2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les cahiers du laboratoire Leibniz, 109*.

Bodgan, R., & Biklen, S. (1997). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cardoso, D., Szymansky, J., & Rostami, M. (2009). *Matemática Discreta Combinatória, Teoria dos Grafos, Algoritmos.* Lisboa: Escolar Editora.

De Villiers, M. (2002). Developing understanding for different roles of proof in dynamic geometry. *ProfMat 2002.* Viseu, Portugal.

Duval, R., & Egret, M. (1989). L'organisation dedutive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la demonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive 2*, pp. 25-40.

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. Wittrock, *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Mac-Millan.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In F. Lester, *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM and IAP.

Mariotti, M. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Guitiérrez, & P. B. (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 171-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, pp. 87-125.

ME-DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais.* Lisboa: Departamento do Ensino Básico. Ministério da Educação.

ME-DEB. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME-DES. (2001a). *Matemática A - 10º Ano Cursos Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação: Departamento do Ensino Secundário.

ME-DES. (2001b). *Programa de Filosofia 10º e 11º ano. Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos. Formação Geral.* Lisboa: Ministério da Educação: Departamento do Ensino Secundário.

ME-DES. (2002). *Programa de Matemática A 11º ano.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Neto, T. (2009). *O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas.* Aveiro: Universidade de Aveiro - Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa.

Neto, T. (2010). Diferentes Enfoques Teóricos de Investigação sobre o Ensino e a Aprendizagem da Demonstração em Geometria. In M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. Sierra, *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 87-113). Lleida: SEIEM.

Ponte, J. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3(1)*, pp. 1-16.Currently available online at: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte%28Quadrante-Estudo%20caso%29.pdf.

Ponte, J. (2005). Gestão Curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, pp. 1-26. Lisboa: APM. Currently available online at: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf.

Rocha, R. (s.d.). *O Pensamento Racional Lógico, a Intuição e a Criatividade no Processamento de Administração Estratégica.* Santa Maria, Brasil: DCA/PPGEP - UFSM.

Velleman, & D.J. (1998). *How To Prove It: A Structured Approach.* Cambridge: Cambridge University Press.

ANEXOS

ANEXO I

Apresenta o teu raciocínio de forma clara, <u>justificando</u> todos os passos intermédios que tiveres de efectuar.

Abril 2011

Grupo:

____

____

Não existe Matemática sem demonstração, com a qual, recorrendo a métodos e técnicas desenvolvidas ao longo de milénios, se fundamentam as respectivas conclusões.

(Cardoso, Szymansky & Rostami, 2009, p.37)

1.

Demonstra a seguinte proposição:

Se $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são dois planos paralelos e $\boldsymbol{r}$ uma recta contida em $\boldsymbol{\alpha}$, então $\boldsymbol{r}$ é paralela a $\boldsymbol{\beta}$.

2.

Demonstra, recorrendo ao Método de Indução Matemática que:

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{n\pi}) = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{para\ todo\ n} \in \mathbb{N}$$

Método de Indução Matemática

É um método de demonstração matemática que pode ser usado para provar que uma propriedade é verdadeira para qualquer número natural.

O esquema de uma demonstração por recorrência ou **Indução Matemática** é o seguinte:

(i) <u>*Caso base:*</u>

Mostrar que a propriedade é válida para n = 1;

(ii) <u>*Passo de indução*</u>*:*

Mostrar que a propriedade é hereditária, isto é, se é verdadeira para o inteiro n, também é verdadeira para o inteiro *n+1*, sucessor de *n*;

(iii) <u>*Conclusão*</u>*:*

Concluir que a propriedade é verdadeira para qualquer valor natural de *n*. Com efeito, sendo válida para 1, como é hereditária, também é válida para 2; sendo para 2, também o é para 3, e assim sucessivamente.

Nota: Não é obrigatório começar com *n= 1*. Caso se pretenda provar que a propriedade é verdadeira para todo o $n \geq a$, com *a* número natural, na primeira fase começa- se por testá-la para *n = a*.

<u>*Exemplo:*</u> **Demonstrar que $\mathbf{2^n \times 3^n = 6^n}$, para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.**

(i) Para $n = 1$:

$2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6 = 6^1$

(ii) **Hipótese:** $2^n \times 3^n = 6^n$

Tese: $2^{n+1} \times 3^{n+1} = 6^{n+1}$

$$\begin{aligned}
2^{n+1} \times 3^{n+1} &= 2^n \times 2 \times 3^n \times 3, por\ definição\ de\ potência\ de\ exp.natural \\
&= 2^n \times 3^n \times 2 \times 3, pela\ propriedade\ comutativa\ da\ multip. \\
&= 6^n \times 2 \times 3, por\ hipótese \\
&= 6^n \times 6 \\
&= 6^{n+1}, por\ definição\ de\ potência\ de\ exp.natural
\end{aligned}$$

(iii) Provámos então que a proposição, além de ser verdadeira para $n = 1$, é hereditária. Podemos concluir que $2^n \times 3^n = 6^n, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.

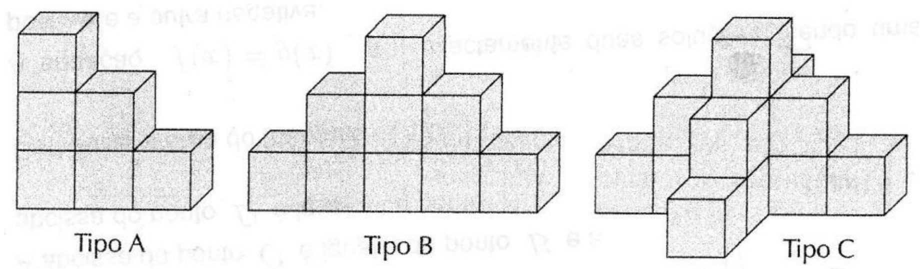
ANEXO II

Actividade de Avaliação – Matemática A – 11º Ano – 19/05/11	Versão 1

NOMES: -- Nº-----
-- Nº-----

PARTE 1

Considera os três tipos A, B e C de «escadaria» construídos a partir da sobreposição de cubos, como a figura ilustra (cada uma com três degraus).



1. Supõe uma «escada» do tipo C com 12 degraus. Quantos cubos são necessários para a base da «escada»?

2. Quantos cubos são necessários em cada tipo de «escada», se tiverem 10 degraus de altura?

3. Determina expressões que te permitam calcular o número de cubos necessários para construir cada tipo de escada com n degraus.

4. Supõe que existem 900 cubos disponíveis. Qual o tipo de «escada» que é possível construir utilizando exactamente os 900 cubos? Indica o respectivo número de degraus em altura.

PARTE 2

O Sr. Alberto vai fazer obras em sua casa, que demorarão dois meses, ficando a sua garagem ocupada com materiais de construção, pelo que necessita de guardar o carro noutro local durante esse período de tempo. Encontrou duas garagens, A e B, com diferentes modalidades de pagamento.

Na garagem A, o Sr. Alberto pagará 10€ na primeira semana, 15€ na segunda semana, 20 € na terceira e assim sucessivamente, pagando em cada semana mais 5€ do que na anterior.

Na garagem B, o Sr. Alberto pagará 1€ na primeira semana e, nas semanas seguintes, irá pagar o dobro da quantidade que pagou na semana anterior.

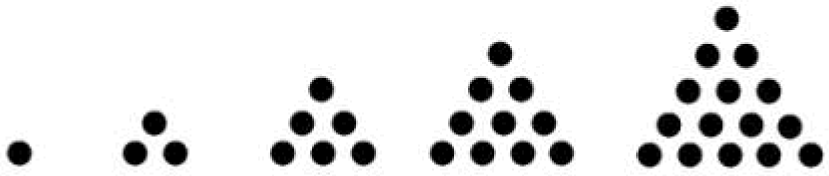
1. Determina o preço da 4ª semana, em cada uma das modalidades.

2. Define, por recorrência, as sequências dos preços a pagar por cada uma das semanas após o início do aluguer, em cada uma das modalidades.

3. Qual das modalidades é mais vantajosa para o Sr. Alberto? Justifica a tua resposta e indica as circunstâncias em que a outra modalidade poderia ser mais vantajosa.

PARTE 3

Considera a sucessão (u_n) dos chamados números triangulares, ilustrada na seguinte sequência de figuras,



cuja definição por recorrência é:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1, \end{cases} \text{ para } n \geq 1$$

Demonstra, pelo método de indução, que o termo geral desta sucessão é $u_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$, para todo o $n \in N$.

Formulário

Soma dos n primeiros termos de uma

- Progressão Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

- Progressão Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, com $r \neq 1$

COTAÇÕES

1ª Parte				**2ª Parte**			**3ª Parte**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	20
9	12	9	15	10	10	15	